Patrones inevitables y amibas

Adriana Hansberg
Instituto de Matemáticas
UNAM Juriquilla
Querétaro, Mexico
ahansberg@im.unam.mx

El Teorema de Ramsey [5] dice que, dado un entero positivo t, existe un entero $R(t)$ tal que toda 2-coloración de las aristas de K_n, la gráfica completa de orden n, donde $n \geq R(t)$, contiene una subgráfica K_t monocromática. El Teorema de Turán [6] dice que toda gráfica de orden n y al menos $(1 - \frac{1}{t-1})\frac{n^2}{2}$ aristas, contiene forzosamente una subgráfica K_t. Relacionado con estas dos tipos de resultados, en este trabajo volcaremos nuestra atención hacia subestructuras 2-coloreadas en 2-coloraciones de las aristas de la gráfica completa K_n. Bollobás conjeturó que, para n suficientemente grande y cualquier $\varepsilon \in (0, 1)$, toda 2-coloración de las aristas de K_n con $\varepsilon\binom{n}{2}$ aristas de cada color contiene uno de los siguientes dos patrones: una subgráfica K_{2t} en donde uno de los colores induce una K_t o una subgráfica K_2t en donde uno de los colores induce dos copias disjuntas de K_t (ver [4]). Esta conjetura fue probada en [4]. En [2], se estudia el problema desde un punto de vista estilo Turán y se muestra que tan solo se requiere asumir la presencia de un número subcuadrático de aristas de cada color para que este resultado sea cierto. Mediante estos patrones, llamados *inevitables*, puede darse una caracterización de las gráficas balanceables y las omnitonales que definimos a continuación. Una gráfica G se llama *balanceable* si, para toda n suficientemente grande, existe un número $\mathrm{bal}(n, G)$ tal que toda 2-coloración de las aristas de K_n con más de $\mathrm{bal}(n, G)$ aristas de cada color contiene una copia *balanceada* de G, es decir, una subgráfica isomorfa a G con exactamente la mitad de sus aristas de un color y la mitad del otro. Por otro lado, una gráfica G se dice ser *omnitonal* si, para toda n suficientemente grande, existe un número $\mathrm{ot}(n, G)$ tal que toda 2-coloración de las aristas de K_n con más de $\mathrm{ot}(n, G)$ aristas de cada color contiene, para todo $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, una copia de G con k aristas de un color y $m - k$ aristas del otro, donde m es el número de aristas de G. Es importante destacar aquí la familia de gráficas de las *amibas* definidas en [2] y estudiadas más a fondo en [1], ya que son todas gráficas balanceables y las bipartitas son omnitonales. Finalmente, es importante destacar mencionar que las gráficas balanceables surgen de problemas de suma cero, como puede verse en [3].

En esta charla, daremos un recorrido alrededor de los patrones inevitables en coloraciones de las aristas de una gráfica completa y de las gráficas balanceables y omnitonales, haciendo finalmente énfasis en la familia de las amibas.

Referencias

[1] Y. Caro, A. Hansberg, and A. Montejano, Graphs isomorphisms under edge-replacements and the family of amoebas, Electron. J. Combin., accepted.

[2] Y. Caro, A. Hansberg, and A. Montejano, Unavoidable chromatic patterns in 2-colorings of the complete graph, J. Graph Theory **97** (2021), 123–147.

[3] Y. Caro, A. Hansberg, A. Montejano. Zero-sum K_m over $\mathbb{Z}$ and the story of K_4, Graphs Combin. 35 (2019), no. 4, 855–865.

[4] J. Cutler and B. Montágh, Unavoidable subgraphs of colored graphs, Discrete Math. **308** (2008), 4396–4413.

[5] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, Proceedings of the London Mathematical Society, 30 (1930), 264–286.

[6] P. Turán, On an extremal problem in graph theory, Matematikai és Fizikai Lapok (in Hungarian) **48** (1941), 436–452.