Grafos Torcidos[Ⓢ]

Ana Paulina Figueroa

Departamento Académico de Matemáticas, ITAM, México.
E-mail: `ana.figueroa@itam.mx`

Resumen. Un grafo topológico es un grafo pintado en el plano de forma que sus vértices están representados con puntos y las aristas con curvas de Jordan que conectan a los vértices correspondientes, de forma que dos curvas tienen a lo más un punto de intersección y cada arista no puede pasar por más vértices que con los que incide. Desde hace algunos años, los grafos torcidos han recibido atención del área. En este trabajo discutiremos los resultados que hemos obtenido en los últimos años sobre su número de cruce y sus particiones en árboles planos.

Palabras clave. *Grafos Torcidos, Grafos Topológicos, Número de Cruce, Particiones de grafos, Grafo de árboles de un grafo*

1. Introducción

Una *grafo topológico* simple es un dibujo en el plano de un grafo cuyos vértices son puntos y las aristas son arcos simples continuos que satisfacen: a) cualquier par de arcos tiene a lo más un punto en común, que puede ser uno de los vértices con los que inciden dichas aristas o un cruce propio y b) una arista no puede pasar por más vértices que por los que incide. Si todas las aristas de un grafo topológico son segmentos de linea recta, entonces es llamada *grafo geométrico*. Un grafo geométrico cuyos vértices están en posición convexa es una *grafo convexo* y al grafo convexo completo lo denotaremos por C_n.

En 1992 Harborth y Mergersen encontraron los *grafos torcidos* mientras estudiaban grafos topológicos con el mayor número de cruces y número de aristas fijo [12]. El *grafo completo torcido* T_n es un grafo completo topológico simple con vértices $v_1v_2, \ldots v_n$ que cumple que dos aristas v_iv_j y $v_{i'}v_{j'}$ se cruzan si y sólo si $i < i' < j' < j$ or $i' < i < j < j'$. Dos grafos topológicos simples G y G' son *débilmente isomorfos* si existe un isomorfismo entre G y G', de forma que dos aristas se cruzan en G si y sólo si la imagen directa de sus vértices inducen dos aristas que se cruzan en G'. Harborth y Mergensen demostraron que los grafos completos torcidos no contienen subgrafos débilmente isomorfos a un grafo convexo completo con 5 vértices.

[Ⓢ]

En el 2003 Pach *et al.* [15], llamaron *grafos torcidos* a aquellos grafos que son débilmente isomorfos a un subgrafo simple topológico de T_n y reformularon el teorema de Erdős y Szekeres de la siguiente manera: todo grafo geométrico completo con n vértices tiene una subgrafo geométrico completo, que es débilmente isomorfo al grafo convexo completo C_m con $m \geq clogn$ vértices. De esta manera los grafos torcidos son los grafos topológicos que no cumplen con la generalización directa de Erdős y Szekeres para grafos topológicos. Entonces, Pach et al. [15] probaron que no se pueden evadir tanto C_m como T_m en una grafo topológico completo con suficientes vértices.

Teorema 1. *(Pach-Solymosi-Tóth) Todo grafo geométrico completo con n vértices tiene un subgrafo topológico con* $m \geq clog^{1/8}n$ *vértices que es débilmentte isoporfo a* C_n *o a* T_n.

Este teorema es el que comienza el camino en el estudio de las propiedades de los grafos torcidos que últimamente han recibido atención del área [3, 8, 10, 16]. En el 2012, Omaña-Pulido and Rivera-Campo [14] analizaron si los grafos torcidos cumplen con algunas de las propiedades que se conocían sobre los grafos convexos completos. Entre estas propiedades se encuentran: la existencia de trayectorias generadoras planas alternantes, la conexidad del grafo de árboles generadores planos, la conexidad del grafo de acoplamientos perfectos planos, etcétera. En esta charla presentaremos algunos de los resultados que hemos obtenido en los últimos años sobre los grafos torcidos.

Hablaremos del número de cruce de los grafos torcidos, que trabajamos en [3]. El número de cruce de un grafo topológico D es el número de cruces que se forman entre las aristas de D. Uno de los resultados fundamentales en el área del estudio del número de cruce, es el lema de cruce, demostrado en 1982 por Ajtai, Chvátal, Newborn, and Szemerédi [5] e independientemente por Leighton [13]. Ellos probaron que para todo grafo topológico D con n vértices y $m > 4n$ aristas, $cr(D) \geq (1/64)m^3/n^2$ y que esta cota es justa excepto por la constante multiplicativa 1/64. Esta constante se ha mejorado a lo largo de los años. En el caso de los grafos torcidos demostramos un lema de cruce para esta familia. Para cada m y n determinamos una familia de grafos óptimos para el lema. Si $G_{n,m}$ denota al conjunto de grafos con n vértices and m aristas, cualquier grafo en $G_{n,m}$ se puede dibujar como un grafo torcido. Esta propiedad la cumplen también los grafos convexos o los dibujos rectilíneos. Hasta donde sabemos, Ã©sta es la primer familia con dicha característica para la que se puede determinar el mínimo número de cruces sobre $G_{m,n}$.

Finalmente hablaremos sobre las particiones de árboles generadores planos del grafo completo torcido con $2n$ vértices. En el 2006, Bose en al. se preguntaron si el conjunto de aristas de todo grafo geométrico completo tiene una partición en

n árboles geométricos planos [6]. En ese artículo primero estudiaron el caso de los grafos completos geométricos en donde ya se sabían particiones en n árboles generadores planos y las caracterizaron. Luego dieron condiciones suficientes que generalizaban el caso convexo. Charlaremos sobre los resultados en [9]. En este trabajo caracterizamos a las particiones en árboles generadores planos del grafo completo torcido con $2n$ vértices así como a las particiones en árboles generadores planos isomorfos de T_{2n}.

Bibliografía

[1] Xu, G., Li, S., Li, H., Guo, Q. Strong subtournaments of order image containing a given vertex in regular c-partite tournaments with $c \geq 16$, *Discrete Math.* **311** (2011), 2272–2275.

[2] Ábrego, B. M., Fernández-Merchant, S. The crossing lemma for convex graphs, *preprint*.

[3] Ábrego, B.M., Fernández-Merchant, S., Figueroa, A.P., Montellano-Ballesteros, J.J., Rivera-Campo, E. The Crossing Number of Twisted Graphs. *Graphs and Combinatorics* **38** 134 (2022).

[4] Ackerman, E. On topological graphs with at most four crossings per edge, *Computational Geometry*, **85** (2019)

[5] Ajtai, M., Chvátal, V., Newborn, M. and Szemerédi, A. Crossing-free subgraphs, *Ann. Discrete Mathematics*, **12** (1982) 9–12.

[6] Bose, P., Hurtado, F., Rivera-Campo, E., Wood, D.R. Partitions of complete geometric graphs into plane trees, *Computational Geometry*, **34** 2 (2006), 116–125

[7] Chung, F.R.K., Leighton, F.T., Rosenberg, A.L. Embedding graphs in books: A layout problem with applications to VLSI design, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, **8** (1987) 33–58.

[8] Figueroa, A.P., Fresán-Figueroa, J. The biplanar tree graph. *Bol. Soc. Mat. Mex.* **26** (2020), 795–806.

[9] Figueroa, A. P., Rivera-Campo E. Partitions of complete twisted graphs into plane spanning trees (Preprint)

[10] García, A., Tejel, J., Vogtenhuber, B., Weinberger, A. (2023). Empty Triangles in Generalized Twisted Drawings of K_n. In: Angelini, P., von Hanxleden, R. (eds) Graph Drawing and Network Visualization. GD 2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13764. Springer, Cham.

[11] Harary, F., Hill, H. On the number of crossings in a complete graph, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **13** (1963) 333–338.

[12] Harborth, H., Mengersen, I. Drawings of the complete graph with maximum number of crossings. In: Proceedings of the Graph Theory and Computing, Boca Raton, Fl. Congressus Numerantium, vol. 88, pp. 225â€“228. Utilitas Math., Winnipeg (1992).

[13] Leighton, T. *Complexity Issues in VLSI, Foundations of Computing Series*, MIT Press, Cambridge, MA (1983).

[14] Omaña-Pulido E., Rivera-Campo E. Notes on the Twisted Graph. In: Márquez A., Ramos P., Urrutia J. (eds) Computational Geometry. EGC 2011. Lecture Notes in Computer Science, vol 7579, pp. 119–125. Springer, Berlin, Heidelberg (2012).

[15] Pach, J., Solymosi, J., Tóth, G. Unavoidable configurations in complete topological graphs. *Discrete Comput. Geom.* **30** (2003) 311–320.

[16] Schaefer, M. "The graph crossing number and its variants: A survey."The electronic journal of combinatorics (2012): DS21-Apr.