El problema inverso de autovalores para matrices de Jacobi no negativas y bisimétricas*

A.M. Encinas, M.J. Jiménez, M. Mitjana
Universitat Politècnica de Catalunya

C. Marijuán, M. Pisonero
Universidad de Valladolid

30 de mayo de 2023

Resumen

En esta comunicación presentamos nuestros recientes resultados en el problema inverso no-negativo para matrices de Jacobi bisimétricas, que consisten en nuevas condiciones necesarias para que una lista dada de números reales sea realizable por una matriz de Jacobi bisimétrica no negativa. La principal novedad de nuestras técnicas es considerar las diferencias entre autovalores como las variables fundamentales, en lugar de utilizar como tales a los propios autovalores. También hemos obtenido la expresión de la única realización de Jacobi bisimétrica de cualquier lista de tamaño no superior a seis.

1. Introducción

Dentro del denominado problema inverso de autovalores para matrices simétricas (SIEP en sus siglas en inglés), el caso de las matrices de Jacobi (JNIEP) ocupa un lugar central, especialmente cuando se consideran matrices bisimétricas, ya que para cualquier lista estrictamente monótona de n números reales existe una única matriz de Jacobi bisimétrica que realiza la lista. Aparte de su significado concreto en varios ámbitos como física, mecánica o estadística, por citar algunos, las familias de este tipo de matrices cuyo espectro es conocido se utilizan como modelos para testar la eficiencia de los diferentes algoritmos de obtención de los autovalores de una matriz dada y para comprobar la estabilidad de los algoritmos de recuperación, a partir de los datos espectrales, de las entradas de matrices que realizan una lista lista, ver por ejemplo los comentarios en [9, Section 1]. No obstante debemos hacer constar que a pesar de su sencilla estructura, existen muy pocas familias de matrices de Jacobi, incluso bisimétricas, para los que el espectro es conocido. De hecho, los ejemplos se refieren principalmente a dos tipos específicos de familias de matrices de Jacobi bisimétricas cuyas entradas tienen una ligera periodicidad, generalmente de periodo a lo sumo 2, [13, 14], o bien son funciones lineales o cuadráticas del orden de la matriz y del índice de las filas. Este último caso, depara la sorpresa de comprobar cómo, incluso en publicaciones muy recientes, los mismos resultados parciales aparecen redescubiertos una y otra vez y publicados en revistas de muy dispar condición, desde un perfil más teórico de Álgebra Lineal, hasta otro mucho más aplicado en el ámbito de métodos numéricos, ver para una pequeña muestra [1, 4, 6, 9, 12, 15–17].

*Este trabajo ha sido parcialmente finaciado por el Ministerio de Ciencia e Innovación por medio del proyecto PID2021-122501NB-I00 y por la UPC con la ayuda AGRUPS-2022.

La monografía [8], editada en ruso a principios de los años cuarenta del siglo pasado, acuñó el término *matriz de Jacobi* para referirse a una *matriz tridiagonal* con coeficientes reales, aunque hoy es comúnmente aceptado que por matriz de Jacobi entendemos una matriz tridiagonal, real, irreducible y simétrica, ver [10–12, 17], así que ese será el punto de vista que adoptaremos aquí.

Fijada una lista $\Lambda \subset \mathbb{R}$ de n valores diferentes, si nos preguntamos por las posibles matrices de Jacobi de orden n que realizan Λ, vemos que necesitamos determinar $2n-1$ entradas de la matriz a partir de los n datos. Por tanto, para obtener una única solución necesitamos o bien añadir $n-1$ datos adicionales en el espectro, ver por ejemplo [10–12, 17] o fijar una estructura interna para la matriz, ver [1, 4, 13–16] que es la opción que nosotros hemos considerado en [5] y que mantendremos aquí.

Una matriz se denomina *bisimmétrica* cuando es simétrica respecto de sus dos diagonales principales. La estructura de este tipo de matrices y de su espectro están descritos en [3]. Para matrices de Jacobi, la bisimetría reduce a n el número de entradas a determinar, así que es razonable esperar que para cada lista de n números reales exista una única matriz de Jacobi bisimétrica que la realiza. La interpretación de la bisimetría en términos del sistema de muelles-masas con masas con vanos igualmente distribuidos, así como la existencia y unicidad de una matriz de Jacobi bisimétrica realizando una lista dada, pueden encontrarse en [2, 8, 10, 11]. Sin embargo, ninguno de estos trabajos se preocupa de si tal tipo de matriz es no-negativa.

En contraste, a finales de la década de los 70 del siglo pasado, S. Friedland y A.A. Melkman obtuvieron en [7] una muy completa lista de condiciones necesarias sobre una lista de números reales para que sea realizada por una matriz de Jacobi no negativa y mostraron cómo esas condiciones eran suficientes para resolver el JNIEP hasta el orden 6. Sin embargo, excepto en casos triviales, ninguna de esas condiciones garantiza que alguna de las matrices no negativas que realizan la lista sea además bisimétrica.

El problema que planteamos en [5] y que exponemos aquí, es el de la realizabilidad de una lista dada de números reales por una matriz de Jacobi no negativa y bisimétrica, y planteamos la caracterización de su espectro para el caso de órdenes no superiores a 6.

Referencias

[1] M. Andelić, C.M. da Fonseca, E. Kiliç, Z. A. Stanić. A Sylvester-Kac matrix type and the Laplacian controllability of half graphs. *Electron. J. Linear Algebra*, **38** (2022), 559-571.

[2] C. de Boor, G.H. Golub. The numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra Appl.* **21** (1978), 245-260.

[3] A. Cantoni, P. Butler. Eigenvalues and Eigenvectors of Symmetric Centrosymmetric Matrices. *Linear Algebra Appl.*, **13** (1976), 275-288.

[4] W. Chu. Spectrum and eigenvectors for a class of tridiagonal matrices. *Linear Algebra Appl.*, **582** (2019), 499-516.

[5] A.M. Encinas, M.J. Jiménez, C. Marijuán, M. Mitjana, M. Pisonero. Bisymmetric Nonnegative Jacobi Matrix Realizations. *Submitted*

[6] C.M. da Fonseca , D.A. Mazilu, I. Mazilu, H. T. Williams. The eigenpairs of a Sylvester-Kac type matrix associated with a simple model for one-dimensional deposition and evaporation. *App. Math. Letters*, **26** (2013) 1206-1211.

[7] S. Friedland, A.A. Melkman. On the Eigenvalues of Non-negative Jacobi Matrices.*Linear Algebra Appl.*, **25** (1979), 239-253.

[8] F.P. Gantmacher, M.G. Krein: Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems. Revised edition. Translation based on the 1941 Russian original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2002.

[9] G.M.L. Gladwell, T.H. Jones, N.B. Willms. A test matrix for an inverse eigenvalue problem. *J. Appl. Math.*, (2014) 515082.

[10] O.H. Hald. Inverse Eigenvalue Problems for Jacobi Matrices. *Linear Algebra Appl.*, **14**: 63-85, 1976.

[11] H. Hochstadt. On the Construction of a Jacobi Matrix from Spectral Data. *Linear Algebra Appl.*, **8**: 435-446, 1974.

[12] A. Huseynov. Inverse problem about two-spectra for finite Jacobi matrices with zero diagonal. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **24** (2016), 637-642.

[13] E. Kiliç. Sylvester-tridiagonal matrix with alternating main diagonal entries and its spectra. *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **14** (2013), 261-266.

[14] E. Kiliç, T. Arikan. Evaluation of spectrum of 2-periodic tridiagonal-Sylvester matrix. *Turkish J. Math.*, **40** (2016), 80-89.

[15] R. Oste, J. van der Jeugt. Tridiagonal test matrices for eigenvalue computations: two-parameter extensions of the Clement matrix. *J. Comput. Appl. Math.*, **314** (2017), 30-39.

[16] R. Vaia, L. Spadini. Persymmetric Jacobi matrices with square-integer eigenvalues and dispersionless mass-pring chains. *Linear Algebra Appl.*, **585** (2020), 164-177.

[17] Y. Wey, H. Dai. An inverse eigenvalue problem for Jacobi matrix. *Appl. Math. Comput.*, **251** (2015), 633-642.