La inversa de grupo del Laplaciano combinatorio en grafos distancia-biregulares*

A. Abiad
Department of Mathematics and Computer Science/Technique University Eindhoven

Á. Carmona, A. M. Encinas, M.J. Jiménez
Departament de Matemàtiques/UPC

May 30, 2023

Abstract

En este trabajo presentamos nuestra contribución al problema inverso para M–matrices en el caso de grafos distancia-biregulares. Dicho problema consiste en determinar cuándo la inversa de grupo del laplaciano combinatorio de una red es también una M–matriz.

1 Introduction

Las M-matrices aparecen de forma natural en discretizaciones de operadores diferenciales elípticos, que pueden considerarse como una generalización del laplaciano. Las propiedades de las M-matrices las hacen también especialmente adecuadas para resolver, mediante métodos iterativos, los sistemas lineales resultantes de dichas discretizaciones. Asimismo, en un contexto puramente discreto, las M-matrices aparecen asociadas al tratamiento de diversos problemas relacionados con las cadenas de Markov, por ejemplo, el cálculo del PageRank de Google.

Una de las principales cuestiones en el área es determinar las condiciones para que una matriz irreducible y simétrica con elementos no diagonales no positivos (una Z-matriz), sea una M-matriz; es decir, la única condición que necesitamos imponer es que la matriz sea semidefinida positiva. Por supuesto, los elementos diagonales deben ser positivos.

Problema Dado $c_{ij} \geq 0$, $1 \leq i < j \leq n$, y la Z-matriz irreducible y simétrica

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} d_1 & -c_{12} & \cdots & -c_{1n-1} & -c_{1n} \\ -c_{12} & d_2 & \cdots & -c_{2n-1} & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{1n-1} & 0 & \cdots & d_{n-1} & -c_{n-1n} \\ -c_{1n} & 0 & \cdots & -c_{n-1n} & d_n \end{bmatrix} = \mathsf{D} - \mathsf{A}$$

1.- ¿Para qué valores $d_1, \dots, d_n \geq 0$ es M una M–matrix <u>singular</u>?

*Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia e Innovación bajo el proyecto PID2021-122501NB-I00 y por la UPC bajo las ayudas AGRUP-UPC.

2.- Entonces, ¿cuándo su inversa de grupo, $\mathsf{M}^{\#}$, es también una M–matriz?

Una condición simple para asegurar que una Z-matriz sea una M-matriz singular es imponer la diagonal dominancia débil, este es el caso del Laplaciano combinatorio. Este caso particuklar no a motivado a considerar el problema en el contexto general de redes. Para ello consideraremos un conjunto V de n vértices, el orden de la matriz, y el grafo inducido por la matriz; es decir, dos vértices son adyacentes si la entrada ij de la matriz es positiva.

Esta pregunta ha sido respondida para árboles con pesos por Kirkland y Neumann [8], y para grafos de distancia regular por Bendito, Carmona y Encinas [4]. En un contexto más general, el problema planteado ha sido investigado para matrices no negativas que tienen pocos valores propios por Kirkland y Neumann [7], para matrices periódicas y no periódicas de Jacobi por Chen, Kirkland y Neumann [5] y para los operadores de Schrödinger en el caso en el que los grafos subyacentes son caminos por Bendito, Carmona y Encinas [2] y Carmona, Encinas y Mitjana [3]. Recientemente, Kalauch, Lavanya y Sivakumar han estudiado algunas clases de matrices cuyas inversas de grupo son M-matrices [6]. En este trabajo ofrecemos una nueva visión del problema planteado para grafos distancia biregulares, que fue completamente resuelto en [1].

2 $\mathsf{L}^{\#}$ para grafos distancia-biregulares

Decimos que el grafo $\Gamma = (V, E)$ es *semiregular* si Γ es bipartito con $V = V_0 \cup V_1$ y hay números k_0 y k_1 tales que cada vértice en V_0 tiene k_0 vecinos y cada vértice en V_1 tiene k_1 vecinos. En este caso, definimos $D_\ell = \max\{d(x,y) :\ y \in V, x \in V_\ell\}$, $\ell = 0,1$. Además, para $\ell = 0,1$, lo denotamos por $\bar{\ell} = 1 - \ell$.

Un grafo conexo Γ es *distance-biregular* si Γ es semirregular y para dos vértices cualesquiera x y y a distancia i, los números $|\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$ y $|\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$ solo dependen de i y del conjunto estable dónde está x.

Para $x \in V_\ell$, $\ell = 0,1$, definimos los *números de intersección* por $c_{\ell,i} = |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$ y $b_{\ell,i} = |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$, $i = 0, \dots, D_\ell$, con la suposicón habitual $c_{\ell,0} = b_{\ell,D_\ell} = 0$. Claramente, $c_{0,1} = c_{1,1} = 1$ y para $i \in \{0, \dots, D_\ell\}$ se cumple lo siguiente

$$c_{\ell,i} + b_{\ell,i} = \begin{cases} k_\ell & \text{si } i \text{ es par,} \\ k_{\bar{\ell}} & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

El resultado principal al que llegaremos a través de las denominadas medidas de equilibrio es el siguiente.

Theorem 2.1. *Seat Γ un grafo distance-biregular. Entonces, $\mathsf{L}^{\#}$ es una M-matriz si y solo si, se verifica que*

$$\sum_{j=1}^{D_0-1} \frac{1}{k_{0,j} b_{0,j}} \Big(\sum_{i=j+1}^{D_0} k_{0,i} \Big)^2 \leq \frac{(n-1)}{k_0}.$$

References

[1] Abiad, A., Carmona, Á., Encinas, A. M., Jiménez, M. J. The M-matrix group inverse problem for distance-biregular graphs. *Comput. Appl. Math.* **42** (2023), no. 158. (accesible online)

[2] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M. y Mitjana, M. The M-matrix inverse problem for singular and symmetric Jacobi matrices, *Linear Algebra Appl.* **436** (2012), 1090–1098.

[3] Carmona, A., Encinas, A.M. y Mitjana, M. On the M-matrix inverse problem for singular and symmetric Jacobi matrices, *Electron. J. Linear Algebra* **24** (2013), 237–254.

[4] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M. y Mitjana, M. Distance-regular graphs having the M-property, *Linear Multilinear Algebra* **60**, (2012), 225–240.

[5] Chen, Y., Kirkland, S.J. y Neumann, M. Group generalized inverses of M–matrices associated with periodic and nonperiodic Jacobi matrices, *Linear Multilinear Algebra*, **39** (1995), 325–340.

[6] A. Kalauch, S. Lavanya, K.C. Sivakumar, Matrices whose group inverses are M-matrices, *Linear Algebra Appl.* **614** (2021), 44–67.

[7] Kirkland, S.J. y Neumann, M. Group inverses of M–matrices associated with nonnegative matrices having few eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **220** (1995), 181–213.

[8] Kirkland, S.J., y Neumann, M. The M-Matrix Group Generalized Inverse Problem for Weighted Trees, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **19** (1998), 226–234.