

# Aplicando la teoría de productos de grafos a problemas de mecánica de estructuras

Carlos Camacho Campos<sup>a</sup>    José Carlos Camacho Moreno<sup>b</sup>    Ismael G. Yero<sup>b</sup>

7 de junio de 2023

<sup>a</sup> Departamento de Ingeniería Civil, ETSIA Algeciras, Universidad de Cádiz, Spain

<sup>b</sup> Departamento de Matemáticas, ETSIA Algeciras, Universidad de Cádiz, Spain

## Resumen

En los últimos tiempos se han encontrado múltiples aplicaciones a los productos de grafos. Presentamos una aplicación a problemas de mecánica estructural. En este tipo de problemas el cálculo de los autovalores de la matriz de rigidez puede ser difícil de computar cuando la dimensión de las matrices es bastante grande. Se consiguen obtener soluciones a estos problemas modelizando la estructura principal como un producto de grafos.

## 1. Introduction

La teoría de grafos se ha convertido en los últimos años en una herramienta muy potente para la solución de innumerables problemas prácticos. Por ejemplo, el acelerado desarrollo de las redes sociales ha contribuido altamente en este sentido, y quizás representa una de las aplicaciones más “visibles” de la teoría de grafos en la actualidad. Sin embargo, aplicaciones en diversas ramas de la ingeniería son también comunes en la investigación, aunque en algunos campos se vea en menor medida que en otros. En el caso de problemas relacionados con ingeniería civil, muchos de estas aplicaciones se pueden encontrar en el libro [5,6]. En particular, en este libro se presentan varias aplicaciones de la teoría de grafos, con énfasis en el caso de los llamados productos de grafos, que son estructuras obtenidas a partir de una “multiplicación” de dos grafos iniciales.

Dados dos grafos  $G$  y  $H$  cuyos conjuntos de vértices son  $V(G)$  y  $V(H)$ , respectivamente, se define el producto de  $G$  y  $H$  como un nuevo grafo  $G * H$ , el cual tiene como conjunto de vértices al producto Cartesiano de los conjuntos de vértices de  $G$  y  $H$ . Esto es,  $V(G * H) = V(G) \times V(H)$ , y las aristas de  $G * H$  están basadas en la existencia o no de aristas en los grafos  $G$  y/o  $H$ . Los grafos  $G$  y  $H$  son llamados grafos factores del producto. Existen 256 posibles productos de grafos con estas condiciones, muchos de los cuales son isomorfos y/o carecen de interés. Además, de todos ellos, existen 4 que son los comúnmente conocidos en la literatura como los productos estándar. Ellos son los productos Cartesiano, directo, fuerte y lexicográfico. Para ver más (y mucha) información en el tema de los productos de grafos sugerimos los libros [4,5].

El estudio de estos cuatro productos de grafos ha experimentado un auge desde finales del siglo XX (véase [2,4]). Podemos encontrar investigaciones que van desde el análisis de los grafos productos en sí mismos, su estructura, propiedades, etc. hasta trabajos puramente aplicados en los cuales se explotan los conocimientos existentes sobre los mismos para obtener posteriormente conclusiones sobre diversas situaciones reales. En especial, su aplicación a las estructuras mecánicas, y

en particular, el estudio de sus autovalores (autovalores de las matrices de adyacencia y/o Laplaciana de los grafos), los cuales brindan mucha información sobre características propias de las estructuras mecánicas, han sido notables (veáse [5–10]). En este sentido, esta investigación pretende iniciar una línea de trabajo encaminada a desarrollar nuevos resultados de aplicaciones de la teoría de productos de grafos en la rama de la ingeniería civil con énfasis en el análisis de estructuras mecánicas. Así, pretendemos explorar las siguientes direcciones.

- (I) Desarrollar nuevas formas (o mejorar las existentes) de cálculo de los autovalores de los grafos producto, a través de la utilización del programa MATLAB, que cuenta con una herramienta potente para el trabajo con matrices.
- (II) Generalizar los resultados conocidos sobre aplicaciones de los productos de grafos a las estructuras mecánicas, hacia otros posibles productos de grafos menos conocidos o menos aplicados, y que puedes representar mejor algunos tipos de estructuras.

El desarrollo de la investigación estará centrado en dos objetivos. En esta primera etapa de la investigación nos centraremos en el punto (I), es decir, en la búsqueda de mejoras en el cálculo de varios invariantes, parámetros o índices en grafos productos, utilizando los grafos factores, y a través de la herramienta de cálculo que nos brinda el sistema MATLAB. Claramente, el desarrollo de esto requiere el diseño y programación de algoritmos de cálculo con este sistema MATLAB.

## 2. Resultados computacionales

En este trabajo inicial se modela un problema de cálculo de los autovalores de la matriz de rigidez de una estructura utilizando un grafo ponderado. Si este grafo se puede descomponer como el producto de otros grafos, a través del estudio de los autovalores de la matriz Laplaciana de estos grafos factores del producto podemos llegar al cálculo de los correspondientes del grafo inicial dado. Más información sobre este tema de los autovalores de los grafos productos se puede encontrar por ejemplo en [1].

Comenzamos con un ejemplo de un problema sencillo con dos columnas y tres filas, donde se pueden comprobar los resultados obtenidos. A continuación se generaliza a estructuras más complejas con  $m$  filas y  $n$  columnas y comprobamos las ventajas computacionales de este procedimiento en el cual se utiliza el programa MATLAB para los cálculos realizados. Consideramos un sistema estructural de un entramado con 6 masas representado en la Figura 1, con un soporte que las mantiene ancladas, que suponemos idéntico en todos los puntos e igual a  $k_0$ , por lo tanto la única tensión que se tiene en cuenta es la vertical correspondiente a los pesos, ya que el resto son despreciables. Esto supone un problema estructural con 6 grados de libertad. Esta estructura se puede modelar por el grafo de la misma figura sin tener en cuenta el soporte. Más adelante se puede considerar los soportes, como veremos sumando  $k_0$  en la diagonal final de la matriz de rigidez.

Se puede notar que el grafo de la Figura 1 se puede representar como el producto Cartesiano de dos grafos más simples,  $G_1$  y  $G_2$ , que se corresponderían con las dos estructuras más simples que se muestran en la Figura 2.

Teniendo en cuenta que la matriz de rigidez de una estructura coincide con la matriz Laplaciana del grafo correspondiente (ver [2, 7]), se pueden calcular los autovalores y autovectores de una matriz de rigidez a partir de los de la matriz Laplaciana del grafo. La matriz de rigidez  $R$  se puede escribir usando el producto de Kronecker  $R = I_1 \otimes R_2 + R_1 \otimes I_2$  siendo  $I_1, I_2$  las matrices identidad de la misma dimensión de  $R_1, R_2$  respectivamente. Ver [2, 7]. En [7] se describe cómo calcular las matrices de adyacencia de los distintos productos de grafos y el cálculo de autovalores y autovectores de la matriz de adyacencia del producto en función de los de las matrices de los grafos factores.

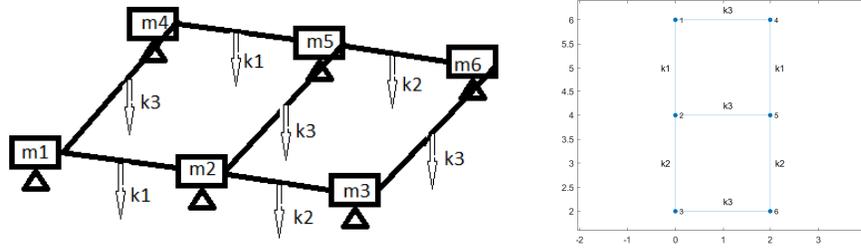


Figura 1: Estructura con 6 masas y grafo modelo correspondiente.

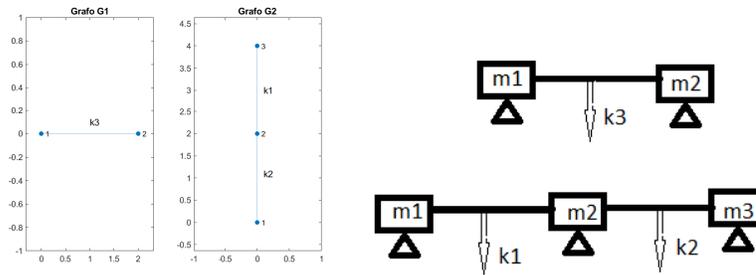


Figura 2: Grafos  $G_1$  y  $G_2$  tales que  $G = G_1 \boxtimes G_2$ , y subestructuras correspondientes.

La ventaja que conseguimos es el poder calcular los autovalores de la matriz Laplaciana del grafo producto a partir de los autovalores de los grafos más simples en los que se descompone, lo cual reduce los tiempos de cálculo de manera considerable. Si  $L_i$  es la matriz Laplaciana del grafo  $G_i$ , la diagonalización de la matriz de rigidez se puede conseguir a partir de la diagonalización de las matrices  $L_i$  de la estructura inicial.

En [7] se describe cómo calcular las matrices de adyacencia de los distintos productos de grafos y el cálculo de autovalores y autovectores de la matriz de adyacencia del producto en función de éstos en las matrices de los grafos factores. La matriz de adyacencia del producto cartesiano es  $A(G_1 \times G_2) = I_{n_1} \times A_2 + A_1 \times I_{n_2}$ , siendo  $A_i$  la matriz de adyacencia de  $G_i$ . Y la matriz Laplaciana se puede calcular  $L(G_1 \times G_2) = I_{n_1} \times L_2 + L_1 \times I_{n_2}$ , siendo  $L_i$  la matriz Laplaciana de  $G_i$ . La matriz laplaciana de un grafo de matriz de adyacencia  $A = (a_{ij})$  de  $n$  vértices, ponderado con una matriz de pesos  $W = (w_{ij})$  se puede calcular a partir de

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} w_{ik} & i = j \\ -a_{ij} w_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

Los autovectores y autovalores del producto de Kronecker se pueden calcular a partir de los de los factores, los autovalores serán los productos de un autovalor de cada una de las matrices componentes  $\lambda \cdot \mu$  y su autovector será  $u \otimes v$  siendo  $u$  autovector de  $\lambda$  y  $v$  autovector de  $\mu$ . Aplicando esto a la sumas anteriores, los autovalores de la matriz Laplaciana del producto cartesiano serán  $\lambda + \mu$ , sumas de autovalores de  $L_1$  y  $L_2$ , y los autovectores  $u \otimes v$ .

Por tanto, la matriz de rigidez de la estructura principal coincidirá con la matriz Laplaciana del producto cartesiano de  $G_1$  y  $G_2$ . Para incluir el soporte, sumamos  $k_0$  en la diagonal usando el

n1	n2	T. Descomposición	T. Directamente
2	3	0.0267	0.1427
3	6	2.6993	332.1542
6	10	0.7970	54.6629
8	12	0.3818	339.0395
10	10	0.4278	No lo puede calcular
10	20	1.0874	No lo puede calcular

Cuadro 1: Resultados computacionales y comparación.

producto de Kronecker. Trabajando con MATLAB, en principio creamos los dos grafos, utilizaremos variables para luego poder generalizar el método cuando los grafos  $G_1$  y  $G_2$  tengan más componentes. Una vez calculados los autovalores, se podrían calcular las frecuencias naturales del sistema, si tenemos una matriz de las masas  $M$ , las frecuencias se podrían calcular con  $\omega^2 = eig(M^{-1} \cdot Rs)$ .

Se han tomado unos valores aleatorios para las tensiones en  $kN/M$  y realizado con distintas filas y columnas, comprobando los resultados cuando se han obtenido por el método directo, o sea, el de realizar los cálculos directamente sobre el grafo producto. La Tabla 1.

Esta técnica es claramente aplicable a otros tipos de grafos, tan sólo cambiando la definición de los correspondientes grafos y sus matrices de pesos. Para un ciclo con 3 nodos y un camino con 4 nodos se consiguen los mismos resultados con tiempos 1,2543 segundos, con la descomposición y 13,6371 segundos con el cálculo sobre la matriz de rigidez. También es posible utilizar otro producto de grafos, como el directo, producto fuerte o lexicográfico que puedan modelizar distintas estructuras.

### 3. Conclusiones

En el trabajo se consigue un algoritmo que permite calcular los autovalores y autovectores de una matriz de rigidez de una estructura cuando al representarla por un grafo, éste permite descomponerlo en un producto de grafos. No solo es aplicable a caminos, cambiando la definición de los grafos  $G_1$  o  $G_2$  puede hacer lo mismo para cualquier tipo de grafos. Sin embargo este tema ha sido bastante explorado ya, y por tanto, es deseable desarrollar nuevos modelos para otros tipos de estructuras, que se puedan representar como un producto de grafos.

#### 3.1. Otros posibles modelos

Los grafos de Sierpiński representan una familia de grafos muy interesante y ampliamente estudiada. Se introdujeron en 1997 en el artículo [11], donde la principal motivación para su introducción fue el vínculo intrínseco con el problema de las Torres de Hanoi. Una generalización reciente de los grafos de Sierpiński apareció en [12]. Sean  $G$  y  $H$  grafos y sea  $f: V(G) \rightarrow V(H)$  una función arbitraria. El *producto de Sierpiński de los grafos  $G$  y  $H$  con respecto a  $f$* , denotado por  $G \otimes_f H$ , se define como el grafo con conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$  y aristas de dos tipos:

- *Tipo-1:*  $(g, h)(g, h')$  es una arista de  $G \otimes_f H$  para todo vértice  $g \in V(G)$  y toda arista  $hh' \in E(H)$ ,
- *Tipo-2:*  $(g, f(g'))(g', f(g))$  es una arista de  $G \otimes_f H$  para cada arista  $gg' \in E(G)$ .

Observamos que las aristas del Tipo-1 inducen  $n(G) = |V(G)|$  copias del grafo  $H$  en el producto de Sierpiński  $G \otimes_f H$ . Para cada vértice  $g \in V(G)$ , sea  $gH$  la copia de  $H$  correspondiente al vértice

*g.* Una arista Tipo-2 une vértices de diferentes copias de  $H$  en  $G \otimes_f H$ , y se llama *arista de conexión* de  $G \otimes_f H$ . Un vértice incidente con un borde de conexión se llama *vértice de conexión*. Observamos que dos copias diferentes de  $H$  en  $G \otimes_f H$  están unidas a lo sumo por una arista. Denotamos por  $H^G$  la familia de funciones desde  $V(G)$  hasta  $V(H)$ .

Se puede observar que el producto de Sierpiński está estrechamente relacionado con otros productos de grafos. Por ejemplo, al considerar una función constante  $f$  en el producto, obtenemos grafos que son, de hecho, los mismos que los llamados grafos producto raíz. Además, al seleccionar la función de identidad  $\text{id} \in G^G$ , el producto de Sierpiński  $G \otimes_{\text{id}} G$  es la (primera iteración del) Sierpi generalizado. Además, un producto de Sierpiński también se puede considerar como un subgrafo del producto (cartesiano, fuerte o lexicográfico). En consecuencia, cualquier contribución al estudio del producto de Sierpiński podría aportar algo más de conocimiento sobre estos productos relacionados.

Nuestro próximo paso en esta dirección será entonces considerar el producto de Sierpiński de grafos, o alguna generalización del mismo, como modelo para diversas aplicaciones relacionadas con el cálculo de tensiones en diversas estructuras mecánicas.

## Referencias

- [1] Brouwer, A. E., Haemers, W. H.: Spectra of graphs. Springer Science & Business Media. (2011).
- [2] Cvetković, D.M., Doob, M., Sachs, H.: *Spectra of Graphs. Theory and applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [3] Hammack, R., Imrich, W., Klavžar, S.: Handbook of product graphs. CRC press, (2011).
- [4] Imrich, W., Klavzar, S.: *Product Graphs: Structure and Recognition*. Wiley, New York 2000.
- [5] Kaveh, A.: *Optimal Structural Analysis*. 2nd edn. Wiley, Chichester 2006.
- [6] Kaveh, A., Rahami, H., Shokaei, I.: *Swift Analysis of Civil Engineering Structures using Graph Theory Methods*. Springer 2020.
- [7] Kaveh, A., Alinejad, B.: *Laplacian matrices of product graphs: applications in structural mechanics*, ISpringer-Verlag, 2011, no. 222, 331-350.
- [8] Kaveh, A., Rahami, H.: *An efficient method for decomposition of regular structures using graph products*, Int. J. Numer. Methods Eng, (2004), no. 61, 1797-1808.
- [9] Kaveh, A., Rahami, H.: *Block diagonalization of adjacency and Laplacian matrices for graph product; applications in structural mechanics*, Int. J. Numer. Methods Eng., (2006), no. 68, 33-63.
- [10] Kaveh, A., Alinejad, B.: *Eigensolution of Laplacian matrices for graph partitioning and domain decomposition approximate algebraic method*, Eng. Comput., (2009), no.26, 828-842.
- [11] Klavžar, S., Milutinović, U.: Graphs  $S(n, k)$  and a variant of the Tower of Hanoi problem, Czechoslovak Math. J. 47(122) (1997) 95–104.
- [12] Kovič, J., Pisanski, T., Zemljič, S. S., Žitnik, A.: The Sierpiński product of graphs, Ars Math. Contemp., to appear.

## 4. Appendix

A continuación se incluyen los códigos utilizados para realizar los cálculos de la Sección 2.

```

n1=2; n2=3; nf=n1+n2-2;%numero de variables de pesos
syms k [1 nf] real; syms k0; % variables de pesos y soporte
s1 = [1:n1-1]; t1= [2:n1 ];% inicio y fin de arcos
s2 = [1:n2-1]; t2= [2:n2];% inicio y fin de arcos
G1= graph(s1,t1);G2= graph(s2,t2);%grafos
AG1= adjacency(G1);%matriz de adyacencia
F1=k(n2:n1+n2-2);%variables pesos para G1
W1=diag(F1,-1)+diag(F1,1);%Matriz pesos G1
W=W1;G=AG1;n=n1;%calculo matriz Laplaciana con pesos
L=-W.*G
for i=1:n
L(i,i)=sum(W(i,:).*G(i,:))-W(i,i)*G(i,i)
end
L1=L %matriz Laplaciana
AG2= adjacency(G2); %repetimos para obtener L2
F2=k(1:n2-1); W2=diag(F2,-1)+diag(F2,1);
W=W2;G=AG2;n=n2
%calculo matriz Laplaciana
L=-W.*G
for i=1:n
L(i,i)=sum(W(i,:).*G(i,:))-W(i,i)*G(i,i)
end
L2=L
G1XG2=kron(L1,eye(n2))+kron(eye(n1),L2);%matriz de rigidez para comprobar
AGP=kron(AG1,eye(n2))+kron(eye(n1),AG2);%matriz ady. G1xG2
GP=graph(AGP);%grafo producto
PG12_sop=G1XG2+kron(eye(n1),eye(n2))*k0;%incluimos soporte
kk=100*rand(1,nf);k0=50*rand(1);%valores random para calculo particular
Lp1=subs(L1,k,kk); Lp2=subs(L2,k,kk);
tic %controlamos tiempo ejecucion
[P1,D1]=eig(Lp1); [P2,D2]=eig(Lp2);%diagonalizacion
Ep1=double(diag(D1)); Ep2=double(diag(D2)); Ep=Ep1(1)*ones(n2,1)+Ep2; %autovalores sin soporte
for i=2:n1
Epi=Ep1(i)*ones(n2,1)+Ep2; Ep=[Ep;Epi]
i=i+1
end
Eps=Ep+k0*ones(n1*n2,1); Autovectores=kron(P1,P2)
t_Descomp=toc;%tiempo en seg descomponiendo
G1XG2p=subs(G1XG2,k,kk)
PG12_sopp=G1XG2p+kron(eye(n1),eye(n2))*k0;
EK=double(eig(G1XG2p))
tic
[Vks,EKs]=eig(PG12_sopp); Vks=double(Vks);EKs=double(EKs);
t_Directo=toc; %tiempo sin descomposición

```