Todo grafo es homeomorfo a uno bipartito antimágico

Ilan A. Goldfeder, Nahid Y. Javier-Nol, Joaquín Tey

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, México.
E-mail: ilan@xanum.uam.mx, nahid@xanum.uam.mx, jtey@xanum.uam.mx

Resumen. Un etiquetado *antimágico* de un grafo G es una biyección de $E(G)$ a $\{1, 2, \ldots, |E(G)|\}$ tal que todas las sumas en vértices son distintas, donde la *suma* en un vértice v es la suma de las etiquetas de las aristas que inciden en v. Un grafo es *antimágico* si si el grafo que resulta de eliminar todos sus vértices aislados admite un etiquetado antimágico. En 1990 Hartsfield y Ringel conjeturaron que todo grafo conexo distinto de K_2 es antimágico, conjetura que sigue abierta; particularmente para grafos conexos con muchos vértices de grado dos, salvo algunas excepciones.

Dos grafos son *homeomorfos* si ambos se pueden obtener mediante subdivisiones de las aristas de un tercero. En esta nota mostramos que todo grafo simple (conexo o no) es homeomorfo a un grafo bipartito antimágico. Consecuentemente, se demuestra que todo grafo es homeomorfo a uno que admite una *orientación antimágica*.

Palabras clave. Grafo antimágico, homeomorfismo, algoritmo.

1 Introducción

Un etiquetado *antimágico* de un grafo G es una función biyectiva de $E(G)$ a $\{1, 2, \ldots, |E(G)|\}$ tal que todas las sumas en vértices son distintas, donde la *suma* en un vértice v (denotada por $s(v)$) es la suma de las etiquetas de las aristas que inciden en v. Un grafo es *antimágico* si el grafo que resulta de eliminar todos sus vértices aislados admite un etiquetado antimágico.

Durante la ejecución de un algoritmo de etiquetado sobre G, se dice que $v \in V(G)$ está *saturado* si todas las aristas que inciden en v ya tienen etiquetas.

Dos grafos son *homeomorfos* si ambos se pueden obtener mediante subdivisiones de las aristas de un tercero.

En 1990 Harstfield y Ringel [5] establecieron la siguiente conjetura.

Conjetura 1. *Todo grafo conexo distinto de K_2 is antimágico.*

Desde entonces varios trabajos se han realizado soportando la Conjetura 1, para más detalles referirse al survey dinámico de Gallian [4]. Vale la pena observar que en la mayor parte de los artículos sobre el tema, se estudian grafos sin vértices

Grafo	Antimágico
Trayectorias y ciclos	Harstfield y Ringel [5]
Grafos que admiten un C_p-factor, con p primo	Hefetz, Saluz y Tran [7]
Subdivisión de un grafo regular	Deng y Li [3]
Subdivisión de un árbol sin vértices de grado dos	Liang, Wong y Zhu [8]
Arañas	Shang [12]
Arañas dobles	Chang, Chin, Li y Pan [1]
Orugas	Deng y Li [2], Lozano, Mora y Seara [9], Lozano, Mora, Seara y Tey [10]
Árboles cuyos vértices de grado par inducen una trayectoria	Liang, Wong y Zhu [8], Lozano, Mora, Seara y Tey [11]

Tabla 1.1: Grafos antimágicos con "muchos" vértices de grado dos.

de grado dos. Aún así, como se muestra en la Tabla 1.1, se conocen varias familias de grafos antimágicos con "muchos" vértices de grado dos.

El objetivo principal de esta nota es demostrar que subdividiendo convenientemente las aristas de un grafo simple (conexo o no), se puede obtener uno bipartito antimágico. Es decir,

Teorema 1. *Todo grafo es homeomorfo a uno bipartito antimágico.*

Es interesante observar que se conocen grafos no conexos que no son antimágicos (ver Gallian [4]). Aún así, como se verá, aunque un grafo no sea antimágico, es homeomorfo a uno que sí lo es.

Por otra parte, Hefetz, Mütze y Schwartz [6] introducen en 2010 una variación natural de la noción de grafo antimágico para grafos orientados.

Sea G un grafo y $\tilde{G}$ el grafo que resulta de eliminar todos los vértices aislados de G. Se dice que G admite una *orientación antimágica* si existe una orientación D de G y una biyección $f : A(D) \to \{1, 2, \ldots, |E(G)|\}$ tal que la función $s : V(\tilde{G}) \to \mathbb{Z}$ definida como $s(v) = \sum_{w \in N^+(v)} f(\overrightarrow{vw}) - \sum_{w \in N^-(v)} f(\overleftarrow{vw})$, es inyectiva.

Observe que si un grafo bipartito G es antimágico, entonces admite una orientación antimágica. Luego, por el Teorema 1, se sigue inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 1. *Todo grafo es homeomorfo a uno que admite una orientación antimágica.*

2 Bosquejo de la prueba del Teorema 1

Sea G un grafo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que G no tiene vértices aislados. Primero subdividiremos una vez cada arista de G, obteniéndose así un nuevo grafo G^*. Note que G^* es un grafo bipartito donde una de las partes de $V(G^*)$ son los vértices de G.

La idea ahora es encontrar un orden apropiado O_{G^*} para las aristas de G^* y etiquetarlas de acuerdo a este orden usando siempre la menor etiqueta disponible.

Un elemento importante en la construcción de O_{G^*} es la descomposición de G^* en un bosque G_1 y un grafo par G_2, donde alguno de los grafos G_1 o G_2 podría ser vacío. Observe que siempre esto es posible, no importa quien sea G^*. Finalmente, O_{G^*} queda determinado al aplicar el Algoritmo de Búsqueda en Profundidad a cada componente conexa de G_1, y por la construcción de un camino Euleriano cerrado de cada componente conexa de G_2.

Durante este proceso de etiquetado algunas de las aristas de G^* serán reemplazadas por trayectorias de tamaño impar suficientemente grandes y etiquetadas convenientemente. En este caso el nuevo grafo obtenido seguirá llamándose G^*.

Sean $V_I = \{v \in V(G^*) : s(v) \text{ es impar}\}$ y $V_P = \{v \in V(G^*) : s(v) \text{ es par}\}$. Observe que (V_I, V_P) es una partición de $V(G^*)$.

Se puede demostrar que el etiquetado ϕ de G^* obtenido cumple las siguientes propiedades.

P1. Si $v \in V_I$, entonces el grado de v es dos.

P2. Sea v un vértice en V_I (resp. V_P). Cuando v se satura, su suma es mayor que la de cualquier otro vértice en V_I (resp. V_P) previamente saturado.

Claramente, el grafo G^* es homeomorfo a G. Finalmente, usando las propiedades P1 y P2, se puede probar que ϕ es un etiquetado antimágico de G^*.

Referencias

[1] Chang, F., Chin, P., Li, W., Pan, Z. The strongly antimagic labelings of double spiders, *Indian J. Discrete Math.* **6** (2020), no. 1, 43–68.

[2] Deng, K. y and Li, Y. Caterpillars with maximum degree 3 are antimagic, *Discrete Mathematics*, **342** (2019), 1799–1801

[3] Deng, K. y Li, Y. Antimagic labeling of some biregular bipartite graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **42** (2022), 1205–1218.

[4] Gallian, J. A. *A Dynamic Survey of Graph labeling 25th edition,* The Electronic Journal of Combinatorics, 2022.

[5] Hartsfield, N. y Ringel, G. *Pearls in Graph Theory.* Academic Press, INC., Boston, 1990 (revised version, 1994), 108–109.

[6] Hefetz, D., Mütze, D., y Schwartz, J. On antimagic directed graphs, *Journal of Graph Theory*, **64** (2010), 219–232.

[7] Hefetz, D., Saluz, A. y Tran, H. T. T. An Application of the Combinatorial Nullstellensatz to a Graph Labelling Problem, *Journal of Graph Theory*, **42**(2), (2009), 70–82.

[8] Liang, Y., Wong, T. y Zhu, X. Antimagic labeling of trees, *Discrete Mathematics*, **331** (2014), 9–14.

[9] Lozano, A., Mora, M. y Seara, C. Antimagic labelings of caterpillars, *Applied Mathematics and Computation*, **347** (2019), 734–740.

[10] Lozano, A., Mora, M., Seara, C. y Tey, J. Caterpillars are Antimagic, *Mediterranean Journal of Mathematics*, **39** (2021).

[11] Lozano, A., Mora, M., Seara, C. y Tey, J. Trees whose even-degree vertices induce a path are antimagic. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **42** (2022), 959–966.

[12] Shang, J. L. Spiders are antimagic, *Ars Combinatoria*, **118** (2015), 367–372.