El orden s-simétrico r-dicromático

Juan Carlos García Altamirano
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
Universidad Autónoma Metropolitana - Cuajimalpa, México

Mika Olsen
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
Universidad Autónoma Metropolitana - Cuajimalpa, México

May 30, 2023

Abstract

El número dicromático de un digrafo fue introducido por Neumann-Lara en 1982 como una extensión del número cromático para grafos. El número dicromático de un digrafo D, denotado por $dc(D)$, es el mínimo número de colores de una coloración de vértices de D tal que en D no hay ciclos dirigidos monocromáticos, si $dc(D) = r$, decimos que D es r-dicromático. Un arco $uv \in A(D)$ es simétrico si también $vu \in A(D)$. Para $r = 3, 4$ y $0 \leq s \leq \binom{r}{2}$, determinamos el mínimo entero positivo n tal que existe un digrafo r-dicromático de orden n con s arcos simétricos y, en algunos casos, determinamos cuantos digrafos no isomorfos hay.

1 Introducción

El número dicromático de un digrafo D fue introducido por Neumann-Lara en 1982 [6] como una extensión del número cromático de un grafo, y se define como el mínimo número de colores de una coloración de vértices de D tal que D no tiene ciclos monocromáticos, denotado por $dc(D)$, si $dc(D) = r$, decimos que D es r-dicromático. Varios conceptos y resultados para el número cromático de grafos se han extendido a los digrafos usando el número dicromático. Por ejemplo, [1–5]. Neumann-Lara también demostró que hay exactamente 4 torneos 3-dicromáticos no isomorfos de orden 7 y un único torneo 4-dicromático de orden 11 [7], y se sabe que cualquier otro torneo de orden menor tiene número dicromático menor, respectivamente.

Consideramos digrafos sin lazos y arcos multiples. Un arco $uv \in A(D)$ es **simétrico** (**asimétrico**) si $vu \in A(D)$ ($vu \notin A(D)$). El **digrafo simétrico** $D(G)$, de un grafo G, es el digrafo obtenido al reemplazar cada arista de G por un arco simétrico. Para r y s enteros positivos, con $r \geq 2$ y $0 \leq s \leq \binom{r}{2}$, definimos el **orden s-simétrico r-dicromático**, denotado por $n(r, s)$, como el mínimo entero positivo n tal que existe un digrafo de orden n con s arcos simétricos y número dicromático igual a r. En estos términos, por lo expuesto anteriormente, $n(3, 0) = 7$ y $n(4, 0) = 11$. Denotamos al número de digrafos no isomorfos de orden n con s arcos simétricos y número dicromático r por $D_n(r, s)$. En este trabajo, nos enfocamos en $D_n(r, s)$ cuando n es el mínimo posible, es decir, $n = n(r, s)$. Además, determinamos o damos cotas para $n = n(r, s)$ y $D_n(r, s)$ cuando $r = 3, 4$ y $0 < s \leq \binom{r}{2}$.

2 Resultados

2.1 El orden s-simétrico 3-dicromático

Observación 2.1. *Dado que* $dc(D(C_3)) = 3$*, se sigue que* $n(3,3) = 3$ *y* $D_3(3,3) = 1$*.*

Observación 2.2. *Si un digrafo* D *de orden* 4 *tiene exactamente* 2 *arcos simétricos, entonces* $dc(D) \leq 2$*.*

Teorema 2.3. $n(3,2) = 5$ *y* $D_5(3,2) = 2$*.*

Demostración. Por la observación 2.2, $n(3,2) > 4$. Sea D un digrafo con dos aristas simétricas, $dc(D) = 3$ y con conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Tenemos dos casos:

Caso 1. D tiene dos aristas simétricas adyacentes, sean $v_1v_2, v_2v_1, v_1v_3, v_3v_1 \in A(D)$, ver figura 1 (a). Si $\{v_2, v_3, v_5\}$, $\{v_2, v_4, v_5\}$ o $\{v_1, v_3, v_4\}$ es acíclico, entonces D es 2-coloreable, por lo que cada uno de los 3 conjuntos debe inducir un ciclo dirigido. Las direcciones de los arcos quedan totalmente determinadas al asignarle una dirección a algún arco y en dado caso se obtiene un único digrafo (salvo isomorfismo).

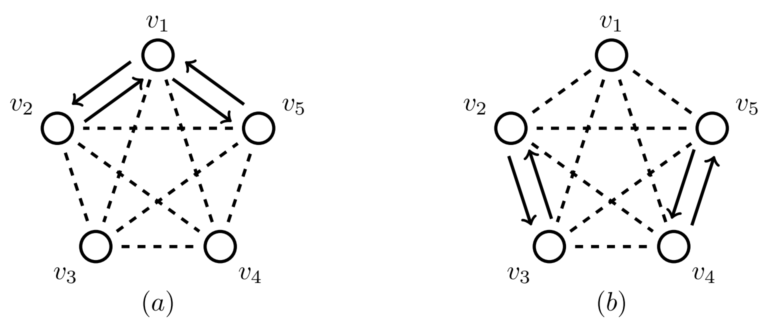

Figure 1: $D_5(3,2)$.

Caso 2. D tiene dos aristas simétricas no adyacentes, sean $v_1v_2, v_2v_1, v_1v_3, v_3v_1 \in A(D)$, ver figura 1 (b). Si alguno de los conjuntos $\{v_1, v_2, v_4\}$,$\{v_1, v_2, v_5\}$,$\{v_1, v_3, v_4\}$ y $\{v_1, v_3, v_5\}$ es acíclico, entonces D es 2-coloreable, por lo que cada uno de los conjuntos debe inducir un ciclo. Las direcciones de los arcos quedan totalmente determinadas al asignarle una dirección a algún arco y en dado caso se obtiene un único digrafo (salvo isomorfismo).

Por lo tanto, $D_5(3,2) = 2$. □

Observación 2.4. *Si* D *es un digrafo de orden* 5 *tiene exactamente* 1 *arco simétrico, entonces* $dc(D) \leq 2$*.*

Teorema 2.5. $n(3,1) = 6$ *y* $D_6(3,1) = 4$*.*

Demostración. Por la observación 2.4, $n(3,1) > 5$. Analizando todos los posibles casos, se obtienen los 4 digrafos no isomorfos que se muestran en la figura 2.

□

Teorema 2.6. $n(3,0) = 7$ *y* $D_7(3,0) = 5$*.*

Demostración. En [7] se demostró que hay exactamente 4 torneos 3-dicromáticos no isomorfos de orden 7. En una búsqueda computacional exhaustiva, encontramos un subdigrafo (que no es un torneo) que tiene número dicromático 3. □

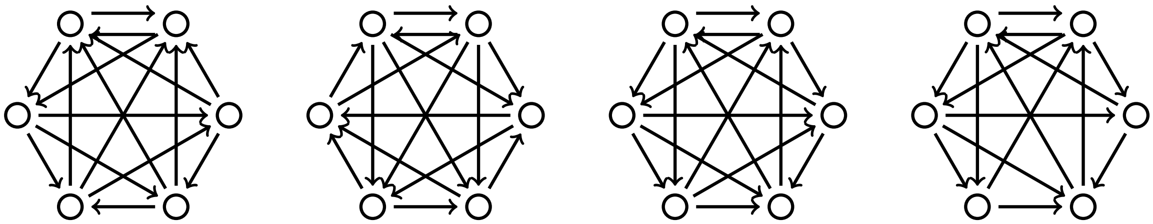

Figure 2: $n(3,1) = 6$ y $D_6(3,1) = 4$.

2.2 El orden s-simétrico 4-dicromático

Sea D un digrafo y $uv \in A(D)$ un arco simétrico. Definimos la **extensión de** D **en** u, $E(D,u,u',v)$, como el digrafo que se obtiene desde D al agregar un nuevo vértice u', eliminamos el arco uv, en u' copiamos todas las adyacencias que tiene u con cualquier vértice $w \in V(D)$ con $w \neq v$ y por último agregamos los arcos uu' y $u'v$, ver figura 3.

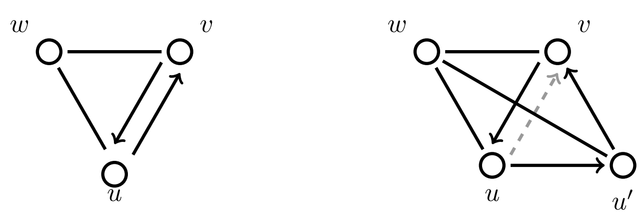

Figure 3: D y $E(D,u,u',v)$.

Omitimos la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Sea D un digrafo y $uv \in A(D)$ un arco simétrico, entonces*

$$dc(E(D,u,u',v)) = dc(D).$$

Observación 2.8. *Dado que $dc(D(K_4)) = 6$, se sigue que $n(4,6) = 4$ y $D_4(4,6) = 1$.*

Observación 2.9. *Si un digrafo D de orden 6 tiene a lo más 5 arcos simétricos, entonces $dc(D) \leq 3$.*

La prueba del siguiente teorema es muy técnica así que la omitimos.

Teorema 2.10. *$n(4,5) = 7$ y $D_7(4,5) = 1$.*

Demostración. De la observación 2.9 tenemos que $n(4,5) > 6$. Demostramos que el digrafo D_0 de figura 4 es el único digrafo 4-dicromt́ico de orden 7 con 5 arcos simétricos. □

Observación 2.11. *Un digrafo D de orden 8 con a lo más 3 arcos simétricos tiene $dc(D) \leq 3$.*

Teorema 2.12. *$n(4,4) \leq 8$ y $n(4,3) = 9$.*

Demostración. Sea D_0 de la figura 4, si consideramos $D_1 = E(D_0,u_2,u_2',u_3)$ y $D_2 = E(D_1,u_4,u_4',u_5)$, resulta que $n(4,4) \leq 8$ y $n(4,3) \leq 9$, junto con la observación 2.11 tenemos que $n(4,3) = 9$. □

Observación 2.13. *Si D es un digrafo de orden 10 sin arcos simétricos, entonces $dc(D) \leq 3$.*

Teorema 2.14. *$n(4,0) = 11$, $D_{11}(4,0) = 1$, $n(4,1) = 11$ y $10 \leq n(4,2) \leq 11$.*

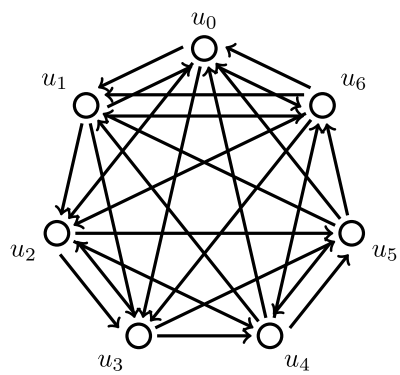

Figure 4: D_0.

Demostración. En [7] se demostró que hay un único torneo 4-dicromático de orden 11, ST_{11} (torneo de Paley de orden 11). Al quitar un arco de ST_{11} verificamos que es 3-dicromático, es decir $n(4,0) = 11$ y $D_{11}(4,0) = 1$. Entonces, no existe un digrafo 4-dicromático con un arco simétrico, uv, de orden menor a 11 ya que $E(u, u', v)$ sería un digrafo 4-dicromático son arcos simétricos de orden menor o igual a 11 con dos vértices, u y u', que comparten 8 adyacencias, lo cual es imposible (en ST_{11} no existe tal par de vértices). Además, encontramos dos digrafos 4-dicromáticos de orden 11 con 1 y 2 arcos simétricos respectivamente. Por lo tanto $n(4,1) = 11$ y $10 \leq n(4,2) \leq 11$. □

3 Conclusiones

Los resultados que presentamos se pueden enunciar en términos de digrafos o en términos de grafos mixtos lo cual resulta ser una aportación novedosa en el estudio de número dicromático.

References

[1] G. Araujo-Pardo, J. J. Montellano-Ballesteros, M. Olsen, C. Rubio-Montiel. The diachromatic number of digraphs. Electr. J. Comb. **25**(3), #P3.51 (2018).

[2] N. Cordero-Michel, H. Galeana-Sánchez. New Bounds for the Dichromatic Number of a Digraph. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **21**(1), Paper No. 7, 14 pp (2019).

[3] D. González-Moreno, R. Hernández-Ortiz, B. Llano, M. Olsen. The dichromatic polynomial of a digraph, Graphs and Comb. 38:85 (2022).

[4] A. Harutyunyan, B. Mohar. Strengthened brooks theorem for digraphs of girth at least three. Electronic J. Comb. **18**(1), #P195 (2011).

[5] W. Hochstättler. A flow theory for the dichromatic number. European J. of Comb. **66**, 160–167 (2017).

[6] V. Neumann-Lara. The dichromatic number of a digraph. J. Combin. Theory Ser. B **33**, 265–270 (1982).

[7] V. Neumann-Lara. The 3- and 4-chromatic tournaments of minimum order. Discrete Math. **135**, 233–243 (1994).