Propiedades y comportamiento asintótico de cierta clase de números de Delannoy con pesos[S]

José María Grau[a], Antonio M. Oller-Marcén[b], Juan Luis Varona[c]

(a) *Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo*
E-mail: grau@uniovi.es

(b) *Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza - IUMA, Zaragoza*
E-mail: oller@unizar.es

(c) *Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño*
E-mail: varona@unirioja.es

Resumen. Los números de Delannoy con peso se definen por medio de la relación de recurrencia $f_{m,n} = \alpha f_{m-1,n} + \beta f_{m,n-1} + \gamma f_{m-1,n-1}$, para $mn > 0$, y con $f_{m,n} = \alpha^m \beta^n$ para $mn = 0$. En este trabajo estudiamos una generalización de estos números en los que se usa la misma relación de recurrencia pero con $f_{m,n} = A^m B^n$ cuando $nm = 0$. En particular, se presta especial atención a la diagonal $f_{n,n}$, y describimos su comportamiento asintótico en el caso $A, B, \alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Además, y gracias a la ayuda de herramientas de computación simbólica, también estudiamos su P-recursividad.

Palabras clave. Números de Delannoy, números de Delannoy con peso, funciones generadoras, asintótica.

1. Introducción

Esta charla es un resumen de lo publicado en el artículo [2].

1.1. Detalles sobre el estilo

El *número de Delannoy* $D_{m,n}$ suele definirse como el número de caminos en $\mathbb{Z}^2$ que van de $(0,0)$ a (m,n) utilizando sólo los pasos $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Deben su nombre al oficial del ejército francés y matemático aficionado Henri Delannoy, que los introdujo por primera vez a finales del siglo XIX [1].

Es fácil ver que los números de Delannoy satisfacen la siguiente recursión:

$$D_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{si } mn = 0, \\ D_{m-1,n} + D_{m,n-1} + D_{m-1,n-1}, & \text{si } mn > 0. \end{cases}$$

[S] El tercer autor está parcialmente financiado por el proyecto de investigación PID2021-124332NB-C22 de MICINN/FEDER.

Y, con herramientas estándar de combinatoria, también es sencillo encontrar su expresión explícita:

$$D_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} \binom{n+m-i}{n} = \sum_{i=0}^{m} 2^i \binom{n}{i} \binom{m}{i}.$$

La siguiente tabla muestra los primeros valores de los números de Delannoy. En ella, los números en negrita son los denominados *números de Delannoy centrales* $\mathfrak{D}_m := D_{m,m}$.

m, n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	**3**	5	7	9	11	13	15	17
2	1	5	**13**	25	41	61	85	113	145
3	1	7	25	**63**	129	231	377	575	833
4	1	9	41	129	**321**	681	1289	2241	3649
5	1	11	61	231	681	**1683**	3653	7183	13073
6	1	13	85	377	1289	3653	**8989**	19825	40081
7	1	15	113	575	2241	7183	19825	**48639**	108545
8	1	17	145	833	3649	13073	40081	108545	**265729**

Los números de Delannoy centrales números en muy diferentes situaciones. En concreto, [3] muestra hasta 29 interpretaciones diferentes de dichos números. Satisfacen la relación de recurrencia

$$(m+2)\mathfrak{D}_{m+2} - (6m+9)\mathfrak{D}_{m+1} + (m+1)\mathfrak{D}_m = 0$$

y, asintóticamente cuando $m \to \infty$, su tamaño es

$$\mathfrak{D}_m = \frac{(3+2\sqrt{2})^m}{\sqrt{\pi}\sqrt{3\sqrt{2}-4}} \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} + \mathcal{O}(m^{-3/2}) \right).$$

1.2. Números de Delannoy con pesos

Si, por ejemplo, estamos interesados en el número de caminos en $\mathbb{Z}^2$ que van de $(0,0)$ a (m,n) utilizando sólo los pasos $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$, pero con probabilidades distintas para los tres tipos de pasos, surgen los denominados *números de Delannoy con pesos*, cuya recurrencia es

$$W_{m,n} = \begin{cases} \alpha^m \beta^n, & \text{si } mn = 0, \\ \alpha W_{m-1,n} + \beta W_{m,n-1} + \gamma W_{m-1,n-1}, & \text{si } mn > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Por supuesto, y dependiendo de la naturaleza de los pesos α, β y γ, admiten muchas más interpretaciones, y de nuevo los números centrales (es decir, con $m = n$) tienen especial interés.

Nosotros estamos interesados en una extensión muy natural de (1.1). Consideramos la misma relación de recurrencia pero permitiendo más condiciones iniciales. En concreto, estudiamos los números $f_{m,n}$ definidos mediante la recurrencia

$$f_{m,n} = \begin{cases} A^m B^n, & \text{si } mn = 0, \\ \alpha f_{m-1,n} + \beta f_{m,n-1} + \gamma f_{m-1,n-1}, & \text{si } mn > 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Obsérvese que (1.1) es el caso particular $A = \alpha$ y $B = \beta$.

2. Algunas propiedades

Con los $f_{m,n}$ de (1.2), definamos la función generatriz

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n} x^m y^n. \tag{1.3}$$

Un primer resultado el siguiente:

Teorema 1. *Para $|x| < 1/|A|$ y $|y| < 1/|B|$, se cumple*

$$f(x,y) = \frac{1 - \alpha x - \beta y + \alpha Bxy + \beta Axy - ABxy}{(1 - Ax)(1 - By)(1 - \alpha x - \beta y - \gamma xy)}. \tag{1.4}$$

Asimismo, y como uno de los objetivos del trabajo es estudiar la estimación asintótica de los números centrales $f_{m,m}$, estamos interesados en la función generatriz de la diagonal $G(z) = \sum_{m \geq 0} f_{m,m} z^m$. Demostrar (1.4) es relativamente sencillo, pero encontrar buenas expresiones para $G(z)$ es bastante más complicado, y requiere usar el teorema integral de Cauchy y el teorema de los residuos. A este respecto, se tiene lo siguiente:

Teorema 2. *Sea $S := S(z) = \sqrt{1 + \gamma^2 z^2 - 2(2\alpha\beta + \gamma)z}$. Entonces,*

$$G(z) = \frac{-B + \beta}{\beta - B + \alpha B^2 z + \gamma B z} + \frac{2\alpha z\big(\alpha B + \beta A - AB + \gamma\big)\big(-1 + \gamma z + S\big)}{S\big(-1 + 2\alpha B z + \gamma z + S\big)\big(2\alpha + A(-1 + \gamma z + S)\big)}.$$

Utilizando esta función generatriz, tras un cuidadoso estudio se llega a las siguientes estimaciones asintóticas:

Teorema 3. *Sean* $A, B, \alpha, \beta, \gamma \geq 0$, *y* $f_{m,n}$ *la sucesión definida en* (1.2). *Entonces,*

$$f_{m,m} \sim \begin{cases} \frac{K}{\sqrt{m}} \left(\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha\beta + \gamma)}\right)^{2m}, & si\ A\beta, B\alpha < \alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta+\gamma)}, \\ B^m \left(\frac{\alpha B+\gamma}{B-\beta}\right)^m, & si\ A\beta \leq \alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta+\gamma)} \leq B\alpha, \\ B^m \left(\frac{\alpha B+\gamma}{B-\beta}\right)^m, & si\ \alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta+\gamma)} \leq A\beta < B\alpha, \\ A^m \left(\frac{A\beta+\gamma}{A-\alpha}\right)^m, & si\ B\alpha \leq \alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta+\gamma)} \leq A\beta, \\ A^m \left(\frac{A\beta+\gamma}{A-\alpha}\right)^m, & si\ \alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta+\gamma)} \leq B\alpha < A\beta, \\ 2B^m \left(\frac{\alpha B+\gamma}{B-\beta}\right)^m, & si\ \alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta+\gamma)} < A\beta = B\alpha, \end{cases}$$

con

$$K = \frac{\gamma(A\beta + B\alpha - AB + \gamma)}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{\frac{\gamma}{\alpha\beta}+1}\left(AB\alpha\beta\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\beta}+1}-1\right) + \alpha\beta\gamma\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\beta}+1}+1\right) - (A\beta+B\alpha)\gamma\right)}.$$

Con ayuda de potentes herramientas de cálculo simbólico, el artículo [2] también demuestra que la función generatriz $G(z)$ satisface una ecuación diferencial

$$q_0(z)G(z) + zq_1(z)G'(z) + z^2 q_2(z)G''(z) = c(z),$$

donde $q_0(z)$, $q_1(z)$ y $q_2(z)$ son polinomios de grado ≤ 4 y $c(z)$ es un polinomio de grado ≤ 2. En el caso $\alpha = \beta = 1$ (que se puede asumir sin pérdida de generalidad) mostramos las expresiones exactas de dichos polinomios, cuyos coeficientes dependen de A, B y γ.

Finalmente probamos que la sucesión diagonal $\mathfrak{f}_m = f_{m,m}$ es P-recursiva, es decir, satisface una ecuación de recurrencia de la forma

$$p_0(m)\mathfrak{f}_m + p_1(m)\mathfrak{f}_{m-1} + p_2(m)\mathfrak{f}_{m-2} + p_3(m)\mathfrak{f}_{m-3} + p_4(m)\mathfrak{f}_{m-4} = 0,$$

donde los $p_i(x)$ son polinomios de grado ≤ 2.

Bibliografía

[1] Delannoy, H. Emploi de l'échiquier pour la resolution de certains problèmes de probabilités, *Comptes-Rendus du Congrès annuel de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*, 24, Bordeaux (1895), 70–90.

[2] Grau, J. M., Oller-Marcén, A. M., y Varona, J. L. A class of weighted Delannoy numbers, *Filomat*, **36** (2022), no. 17, 5985–6007.

[3] Sulanke, R. A. Objects counted by the central Delannoy numbers, *J. Integer Seq.*, **6** (2003), no. 1, artículo 03.1.5, 19 pp.