Valores exactos del número de Schur $S(2, a, b, c)$

Tanbir Ahmed
Montreal Health Innovations Coordinating Center (MHICC), Canada

Luis Boza, María Pastora Revuelta y María Isabel Sanz
Universidad de Sevilla, Spain

26 de mayo de 2023

Resumen

Para un entero $k \geq 2$, definimos la ecuación E_k como $\sum_{j=1}^{k} x_j = x_{k+1}$. Sea $a_1, \ldots, a_n$ una secuencia de enteros con $2 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$. Denotamos por $S(a_1, \ldots, a_n)$ al menor número natural p tal que, para cualquier coloración de n colores de los elementos del conjunto $1, \ldots, p$, existe al menos una solución de color i (donde $1 \leq i \leq n$) para la ecuación E_{a_i}. En 1961, Baumert encontró el valor exacto de $S(2, 2, 2, 2)$, y en 2016, Ahmed y Schaal mostraron dos nuevos valores: $S(2, 2, 2, 3)$ y $S(2, 2, 2, 4)$. En este trabajo, presentamos 65 nuevos valores: $S(2, 2, 2, c)$, donde $5 \leq c \leq 17$; $S(2, 2, 3, c)$, donde $3 \leq c \leq 14$; $S(2, 2, 4, c)$, donde $4 \leq c \leq 11$; $S(2, 2, 5, c)$, donde $5 \leq c \leq 9$; $S(2, 2, 6, c)$, donde $6 \leq c \leq 7$; $S(2, 3, 3, c)$, donde $3 \leq c \leq 11$; $S(2, 3, 4, c)$, donde $4 \leq c \leq 8$; $S(2, 3, 5, c)$, donde $5 \leq c \leq 7$; $S(2, 3, 6, 6)$; $S(2, 4, 4, c)$, donde $4 \leq c \leq 7$; $S(2, 4, 5, c)$, donde $5 \leq c \leq 6$; y $S(2, 5, 5, 5)$.

1. Introducción

Denotaremos como $[a, b]$ al conjunto de enteros m tales que $a \leq m \leq b$, como $J_0[a, b]$ a los pares de $[a, b]$ y como $J_1[a, b]$ a los impares de $[a, b]$. Para un entero $k \geq 2$, definimos la ecuación E_k como $\sum_{j=1}^{k} x_j = x_{k+1}$. Sea $a_1, \ldots, a_n$ una secuencia de enteros con $2 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$. Denotamos por $S(a_1, \ldots, a_n)$ al menor número natural p tal que, para cualquier coloración de n colores de los elementos del conjunto $1, \ldots, p$, existe al menos una solución de color i (donde $1 \leq i \leq n$) para la ecuación E_{a_i}. En 1961, Baumert [2] encontró el valor exacto de $S(2, 2, 2, 2)$, y en 2016, Ahmed y Schaal [1] mostraron dos nuevos valores: $S(2, 2, 2, 3)$ y $S(2, 2, 2, 4)$. Sea $F_2 = E_2$ y para $k \geq 3$, sea F_k el conjunto de ecuaciones $px_1 + qx_2 + (k - p - q)x_3 = x_4$, con $0 \leq p \leq q \leq (k - p)/2$. Denotaremos $S_*(a_1, \ldots, a_n)$, con $2 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$, al menor natural m tal que para toda n-coloración de $[1, m]$ hay una solución de color i, con $1 \leq i \leq n$, de una de las ecuaciones de F_{a_i}. Como las ecuaciones de F_k son casos particulares de las de E_k, se tiene que $S(a_1, \ldots, a_n) \leq S_*(a_1, \ldots, a_n)$.

Se presenta la siguiente conjetura:

Conjetura 1.1. *Si $2 \leq a \leq b \leq c$ entonces $S(2, a, b, c) = S_*(2, a, b, c)$.*

En este trabajo, presentamos 65 nuevos valores: $S(2, 2, 2, c)$, donde $5 \leq c \leq 17$; $S(2, 2, 3, c)$, donde $3 \leq c \leq 14$; $S(2, 2, 4, c)$, donde $4 \leq c \leq 11$; $S(2, 2, 5, c)$, donde $5 \leq c \leq 9$; $S(2, 2, 6, c)$, donde $6 \leq c \leq 7$; $S(2, 3, 3, c)$, donde $3 \leq c \leq 11$; $S(2, 3, 4, c)$, donde $4 \leq c \leq 8$; $S(2, 3, 5, c)$, donde $5 \leq c \leq 7$; $S(2, 3, 6, 6)$; $S(2, 4, 4, c)$, donde $4 \leq c \leq 7$; $S(2, 4, 5, c)$, donde $5 \leq c \leq 6$; y $S(2, 5, 5, 5)$.

Esta conjetura se verifica para los 3 valores ya conocidos ([2], [1]) y los 65 nuevos valores que se presentan en este trabajo.

Si $k \geq 4$, el número de soluciones de E_k en $[1, s]$ es mayor que el de todas las ecuaciones de F_s, ya que en estas últimas los números $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son escogidos de manera que a lo sumo hay tres diferentes, por lo que computacionalmente se requiere una menor memoria comprobar si $S_*(2, a, b, c) \leq s$ que si $S(2, a, b, c) \leq s$ y por tanto para el cálculo de $S_*(2, a, b, c)$ que para el de $S(2, a, b, c)$.

En cada uno de los 65 casos, para un valor s adecuado se prueba que $S(2, a, b, c) \geq s$ mostrando una 4-coloración de $[1, s-1]$ de forma que no tenga soluciones en el primer color de E_2, en el segundo de E_a, en el tercero de E_b y en el cuarto de E_c. Además, se prueba que $S_*(2, a, b, c) \leq s$ probando que cada 4-coloración de $[1, s]$ o bien tiene soluciones en el primer color de F_2, en el segundo de F_a, en el tercero de F_b o en el cuarto de F_c. Con ello se tiene que $s \leq S(2, a, b, c) \leq S_*(2, a, b, c) \leq s$.

Tanto la obtención de la 4-coloración como la prueba de su inexistencia se consigen transformando el problema en una de satifacibilidad, que puede ser resuelto mediante un SAT-solver.

2. Resultados

Los valores exactos obtenidos y los previamente conocidos se muestran en la siguiente tabla:

S(2,2,a,b)	a=2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
b=2	45	77	107	137	175	203	231	261	301	329	357	385	427	455	483	511
3		101	143	155	180	207	244	269	308	332	372	394	436			
4			174	221	244	274	311	347	393	423						
5				262	323	349	391	437								
6					372	437										

S(2,3,a,b)	a=3	4	5	6	7	8	9	10	11
b=3	135	191	197	235	265	317	349	399	431
4		239	285	331	379	426			
5			311	373	409				
6				432					

S(2,4,a,b)	a=4	5	6	7
b=4	296	358	409	467
5		454	501	

S(2,5,a,b)	a=5
b=5	539

Algunas de las 4-coloraciones que prueban las cotas inferiores mostradas en la tabla son:
$S(2, 2, 2, 17) \geq 511$.

- {1, 4, 10, 13, 15, 18, 24, 27, 29, 32, 38, 41, 43, 46, 52, 55, 57, 60, 66, 69, 71, 74, 83, 85, 88, 99, 102, 113, 116, 127, 130, 141, 144, 158, 189, 203, 217, 231, 238, 245, 252, 259, 266, 273, 280, 294, 308, 322, 353, 367, 370, 381, 384, 395, 398, 409, 412, 423, 426, 428, 437, 440, 442, 445, 451, 454, 456, 459, 465, 468, 470, 473, 479, 482, 484, 487, 493, 496, 498, 501, 507, 510},
- {2, 3, 11, 12, 16, 17, 25, 26, 30, 31, 39, 40, 44, 45, 53, 54, 58, 59, 67, 68, 72, 73, 81, 82, 86, 87, 95, 96, 100, 101, 109, 110, 114, 115, 123, 124, 128, 137, 142, 147, 151, 156, 165, 170, 175, 179, 184, 193, 207, 304, 318, 327, 332, 336, 341, 346, 355, 360, 364, 369, 374, 383, 387, 388, 396, 397, 401, 402, 410, 411, 415, 416, 424, 425, 429, 430, 438, 439, 443, 444, 452, 453, 457, 458, 466, 467, 471, 472, 480, 481, 485, 486, 494, 495, 499, 500, 508, 509},
- $[5, 9] \cup [19, 23] \cup [33, 37] \cup [47, 51] \cup [61, 65] \cup [75, 79] \cup [89, 93] \cup [104, 107] \cup [118, 121] \cup [132, 135] \cup \{148, 149, 161, 162, 176, 190, 321, 335, 349, 350, 362, 363\} \cup [376, 379] \cup [390, 393] \cup [404, 407] \cup [418, 422] \cup [432, 436] \cup [446, 450] \cup [460, 464] \cup [474, 478] \cup [488, 492] \cup [502, 506]$,

- $\{14, 28, 42, 56, 70, 80, 84, 94, 97, 98, 103, 108, 111, 112, 117, 122, 125, 126, 129, 131, 136\} \cup [138, 140] \cup \{143, 145, 146, 150\} \cup [152, 155] \cup \{157, 159, 160, 163, 164\} \cup [166, 169] \cup [171, 174] \cup \{177, 178\} \cup [180, 183] \cup [185, 188] \cup \{191, 192\} \cup [194, 202] \cup [204, 206] \cup [208, 216] \cup [218, 230] \cup [232, 237] \cup [239, 244] \cup [246, 251] \cup [253, 258] \cup [260, 265] \cup [267, 272] \cup [274, 279] \cup [281, 293] \cup [295, 303] \cup [305, 307] \cup [309, 317] \cup \{319, 320\} \cup [323, 326] \cup [328, 331] \cup \{333, 334\} \cup [337, 340] \cup [342, 345] \cup \{347, 348, 351, 352, 354\} \cup [356, 359] \cup \{361, 365, 366, 368\} \cup [371, 373] \cup \{375, 380, 382, 385, 386, 389, 394, 399, 400, 403, 408, 413, 414, 417, 427, 431, 441, 455, 469, 483, 497\}$.

$S(2, 2, 3, 14) \geq 436$.

- $J_1[1, 39] \cup \{82, 86, 90, 94, 98, 102, 106\} \cup J_0[110, 136] \cup \{140, 144, 148, 152, 156, 160, 190, 367, 371, 375, 379, 383, 387\} \cup J_1[391, 395] \cup \{399, 403, 407, 411, 415, 419, 423, 427, 431, 435\}$,
- $\{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 41, 45, 49, 53, 56, 57, 60, 61, 64, 65, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 95, 96, 99, 100, 103, 104, 107, 108, 111, 115, 119, 123, 127, 131, 135, 138, 139, 142, 143, 146, 147, 150, 154, 158, 162, 166, 170, 174, 178, 182, 186, 363, 397, 401, 405, 406, 409, 410, 413, 414, 417, 418, 421, 422, 425, 426, 429, 430, 433, 434\}$,
- $\{121, 125, 129, 133, 137, 141, 145\} \cup J_1[149, 161] \cup [163, 165] \cup [167, 169] \cup [171, 173] \cup [175, 177] \cup [179, 181] \cup [183, 185] \cup [187, 189] \cup [191, 362] \cup [364, 366] \cup [368, 370] \cup [372, 374] \cup [376, 378] \cup [380, 382] \cup [384, 386] \cup [388, 390] \cup J_0[392, 408] \cup \{412, 416, 420\ 424, 428, 432\}$,
- $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\} \cup J_0[28, 40] \cup [42, 44] \cup [46, 48] \cup [50, 52] \cup \{54, 55, 58, 59, 62, 63, 66, 67\} \cup [69, 71] \cup [73, 75] \cup [77, 79] \cup J_1[81, 93] \cup \{97, 101, 105, 109, 113, 117\}$.

$S(2, 2, 6, 7) \geq 437$.

- $\{1, 4, 6, 9, 14, 19, 24, 35, 40, 45, 50, 53, 55, 58, 60, 63, 65, 68, 73, 78, 83, 354, 359, 364, 369, 372, 374, 377, 379, 382, 384, 387, 392, 397, 402, 413, 418, 423, 428, 431, 433, 436\}$,
- $\{2, 3, 7, 8, 12, 13, 18, 41, 46, 47, 51, 52, 56, 57, 61, 62, 66, 67, 71, 72, 365, 366, 370, 371, 375, 376, 380, 381, 385, 386, 390, 391, 396, 419, 424, 425, 429, 430, 434, 435\}$,
- $\{59, 64, 69, 70\} \cup [74, 77] \cup [79, 82] \cup [84, 353] \cup [355, 358] \cup [360, 363] \cup \{367, 368, 373, 378\}$,
- $\{5, 10, 11\} \cup [15, 17] \cup [20, 23] \cup [25, 34] \cup [36, 39] \cup [42, 44] \cup \{48, 49, 54, 383, 388, 389\} \cup [393, 395] \cup [398, 401] \cup [403, 412] \cup [414, 417] \cup [420, 422] \cup \{426, 427, 432, 432\}$.

$S(2, 3, 6, 6) \geq 432$.

- $J_1[1, 19] \cup J_0[40, 78] \cup J_0[354, 392] \cup J_1[413, 431]$,
- $\{2, 4, 21, 23, 36, 38, 55, 57, 375, 377, 394, 396, 409, 411, 428, 430\}$,
- $J_0[6, 22] \cup [24, 35] \cup J_1[37, 53] \cup J_1[379, 395] \cup [397, 408] \cup J_0[410, 426]$,
- $J_1[59, 77] \cup [79, 353] \cup J_1[355, 373]$.

$S(2, 4, 4, 7) \geq 467$.

- $\{1, 3\} \cup J_0[8, 14] \cup J_0[44, 50] \cup J_1[55, 61] \cup J_0[406, 412] \cup J_1[417, 423] \cup J_1[453, 459] \cup \{464, 466\}$,
- $\{2\} \cup [4, 7] \cup \{9, 49\} \cup [51, 54] \cup \{56, 411\} \cup [413, 416] \cup \{418, 458\} \cup [460, 463] \cup \{465\}$,
- $\{11, 13\} \cup [15, 43] \cup \{45, 47\} \cup \{420, 422\} \cup [424, 452] \cup \{454, 456\}$,

- $\{58, 60\} \cup [62, 405] \cup \{407, 409\}$.

$S(2, 4, 5, 6) \geq 501$.

- $J_1[1, 25] \cup J_0[54, 106] \cup J_1[395, 447] \cup J_0[476, 500]$,
- $J_0[2, 6] \cup J_1[27, 31] \cup J_0[48, 52] \cup J_1[73, 77] \cup J_0[82, 86] \cup J_1[415, 419] \cup J_0[424, 428] \cup J_1[449, 453] \cup J_0[470, 474] \cup J_1[495, 499]$,
- $J_1[79, 105] \cup [107, 394] \cup J_0[396, 422]$,
- $J_0[8, 30] \cup [32, 47] \cup J_1[49, 71] \cup J_0[430, 452] \cup [454, 469] \cup J_1[471, 493]$.

$S(2, 5, 5, 5) \geq 539$.

- $J_1[1, 27] \cup J_1[11, 27] \cup J_0[58, 114] \cup J_1[425, 481] \cup J_0[512, 538]$,
- $J_0[2, 8] \cup J_1[29, 35] \cup J_0[50, 56] \cup J_1[77, 83] \cup J_0[456, 462] \cup J_1[483, 489] \cup J_0[504, 510] \cup J_1[531, 537]$,
- $J_0[10, 34] \cup [36, 49] \cup J_1[51, 75] \cup J_0[464, 488] \cup [490, 503] \cup J_1[505, 529]$,
- $J_1[85, 113] \cup [115, 424] \cup J_0[426, 454]$.

Por otra parte, para probar la cota superior procedemos de la siguiente forma:

Dados $k, s \geq 3$, sean $\mathcal{D}_k = \{(x_1, x_2, x_3, px_1 + qx_2 + (k - p - q)x_3)$, con $x_1, x_2, x_3 \geq 1$, $px_1 + qx_2 + (k - p - q)x_3 \leq s$ y $0 \leq p \leq q \leq k - p - q\}$. Análogamente, sea $\mathcal{D}_2 = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2)$, con $x_1, x_2 \geq 1$ y $x_1 + x_2 \leq s$. Consideremos las $2s$ variables lógicas $y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_s$ y por cada $t \in \mathcal{D}_k$ las cuatro cláusulas $c_1(k, t) = \bigvee_{m \in t} (\neg y_m \vee \neg z_m)$, $c_2(k, t) = \bigvee_{m \in t} (\neg y_m \vee z_m)$, $c_3(k, t) = \bigvee_{m \in t} (y_m \vee \neg z_m)$ y $c_4(k, t) = \bigvee_{m \in t} (y_m \vee z_m)$.

A cada función $\delta : \{y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_s\} \to \{Verdadero, Falso\}$ se le asigna una 4-coloración $\sigma_\delta : [1, s] \to \{1, 2, 3, 4\}$ definiendo para cada $m \in [1, s]$, $\sigma_\delta(m) = 1$ si $\delta(y_m) \wedge \delta(z_m)$, $\sigma_\delta(m) = 2$ si $\delta(y_m) \wedge \neg\delta(z_m)$, $\sigma_\delta(m) = 3$ si $\neg\delta(y_m) \wedge \delta(z_m)$ y $\sigma_\delta(m) = 4$ si $\neg\delta(y_m) \wedge \neg\delta(z_m)$.

Si existe una función δ_0 que verifique las cláusulas del conjunto $C(2, a, b, c) = \{c_1(2, t) : t \in \mathcal{D}_2\} \cup \{c_2(a, t) : t \in \mathcal{D}_a\} \cup \{c_3(b, t) : t \in \mathcal{D}_b\} \cup \{c_4(c, t) : t \in \mathcal{D}_c\}$ entonces σ_{δ_0} determina una 4-coloración de $[1, s]$ de forma que no haya soluciones en el color 1 de una ecuación de F_2, no haya soluciones en el color 2 de una ecuación de F_a, no haya soluciones en el color 3 de una ecuación de F_b y no haya soluciones en el color 4 de una ecuación de F_c. Por tanto $S_*(2, a, b, c) > s$. Recíprocamente, si no existe la función que verifique las cláusulas de $C(2, a, b, c)$, entonces tampoco existe la 4-coloración y $S_*(2, a, b, c) \leq s$.

El problema de satisfacibilidad se resuelve mediante un SAT-solver, encontrándose el valor de $S_*(2, a, b, c)$ y la 4-coloración correspondiente de $[1, S_*(2, a, b, c) - 1]$. En todos los casos calculados, la 4-coloración no tiene soluciones en el color 1 de la ecuación E_2, no tiene soluciones en el color 2 de la ecuación E_a, no tiene soluciones en el color 3 de la ecuación F_b y no tiene soluciones en el color 4 de la ecuación F_c. Luego $S(2, a, b, c) \geq S_*(2, a, b, c)$ y $S(2, a, b, c) = S_*(2, a, b, c)$.

Referencias

[1] T. Ahmed y D. J. Schaal, *On Generalized Schur Numbers*, Experimenthal Mathematics 25 vol. 2, (2016) 213-218.

[2] L.D. Baumert, *Sum-free sets*, J.P.L. Research Summary 36 vol. 10, (1961) 16-18.