Algoritmos para el cálculo de semigrupos de Abhyankar-Moh[®]

Luis José Santana Sánchez, junto con Evelia R. García Barroso, Juan Ignacio García García y Alberto Vigneron Tenorio

(a) *Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, Universidad de Valladolid*
`E-mail: luisjose.santana@uva.es`

(b) *Departamento de Matemáticas, Estadística e I.O., Universidad de La Laguna*
`E-mail: ergarcia@ull.es`

(c) *Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz*
`E-mail: ignacio.garcia@uca.es, alberto.vigneron@uca.es`

Resumen. Se presentan algoritmos para el cáculo de semigrupos de Abhyankar-Moh con conductor acotado o con grado fijado. Además, fijado un grado par n, se demuestra que para todo valor posible del conductor c, existe un semigrupo de Abhyankar-Moh de grado n y conductor c.

Palabras clave. Semigrupo de Abhyankar-Moh, conductor, pegada de semigrupos.

---

1 Introducción

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Los semigrupos de Abhyankar-Moh surgen de manera natural al estudiar curvas planas que vienen dadas como inmersión de la recta afín en K^2, que fueron estudiadas por Abhyankar y Moh en [1]. Sea $C \subset K^2$ la inmersión de una recta y sea $\overline{C}$ su clausura en el plano proyectivo. Asociado a $\overline{C}$ existe un semigrupo numérico $S(\overline{C})$ formado el cero y el número de intersección de $\overline{C}$ con todas las curvas algebroides con intersección positiva con $\overline{C}$. Por el Teorema de Bresinsky-Angermüller, sabemos que existe una única secuencia $(v_0, \ldots, v_h)$ que genera al semigrupo $S(\overline{S})$, siendo v_0 el grado de la curva C. Esta secuencia es conocida como la *secuencia*

[®] Parcialmente financiado por el proyecto *Monoides y semigrupos afines (ProyExcel_00868)* financiado en la convocatoria 2021 de Ayudas a Proyectos de Excelencia, en régimen de concurrencia competitiva, destinadas a entidades calificadas como Agentes del Sistema Andaluz del Conocimiento, en el ámbito del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI 2020). Consejería de Universidad, Investigación e Innovación de la Junta de Andalucía.

en el infinito de C. Supongamos que $\gcd(\deg C, \mathrm{ord}_{O_\infty}\overline{C}) \not\equiv 0 \pmod{\mathrm{char}\, K}$, entonces (por [1]) la secuencia característica de C debe cumplir

$$\gcd(v_0, \ldots, v_{h-1})v_h < v_0^2,$$

Conocida como la desigualdad de Abhyankar-Moh. Los semigrupos numéricos de curvas que cumplen esta desigualdad se conocen como *semigrupos de Abhyankar-Moh de grado* v_0.

En esta charla veremos algoritmos para calcular semigrupos de Abhyankar-Moh de grado fijado o con *conductor* acotado. Si $v_0 = n$ es el grado de un semigrupo de Abhyankar-Moh, se sabe que su conductor es un número par en el intervalo $n-1 \leq c \leq (n-1)(n-2)$. Finalizamos esta charla viendo que si n es par, para cualquier valor par de c en ese intervalo se puede encontrar un semigrupo de Abhyankar-Moh de grado n y conductor c.

2 Preliminares

Un semigrupo numérico S es un submonoide aditivo de $\mathbb{N}$ con complemento finito en $\mathbb{N}$. Es sabido que los semigrupos numéricos están finitamente generados y que su sistema generador minimal es único. El mayor entero del conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ es conocido como el *número de Frobenius* de S. El *conductor* de S es el número de Frobenius de S más 1.

Nuestro interés está en los semigrupos de Abhyankar-Moh. Es decir, aquellos generados por la secuencia en el infinito de una curva C dada por la inmersión de una recta afín en K^2. Estos semigrupos se caracterian por estar generados por una *secuancia característica* que satisface la desigualdad de Abhyankar-Moh. Decimos que una secuencia de enteros positivos $(v_0, \ldots, v_h)$ es una secuencia característica si satisface las condiciones:

(SC1) $d_k < d_{k-1}$ para todo $1 \leq k \leq h$, y $d_h = 1$; donde $d_k = \gcd(v_0, \ldots, v_k)$.

(SC2) $d_{k-1}v_k < d_k v_{k+1}$ para todo $1 \leq k \leq h-1$.

De esta forma, decimos que S es un semigrupo de Abhyankar-Moh de grado n si está generado por una secuencia característica $(v_0 = n, \ldots, v_h)$ satisfaciendo la desigualdad $d_{h-1}v_h < n^2$.

En [2, Theorem 2.2], los autores demostraron que si $S = S(v_0, \ldots, v_h)$ es un semigrupo de Abhyankar-Moh de grado $v_0 = n$, entonces su conductor cumple que $c(S) \leq (n-1)(n-2)$. Además, demuestran que la igualdad se alcanza si y solo si $v_k = \frac{n^2}{d_{k-1}} - d_k$ para todo $1 \leq k \leq h$. Sabiendo que para estos semigrupos el conductor es siempre par, y que trivialmente tenemos $n-1 \leq c(S)$, una pregunta natural es si es cierto que para cualquier valor par en el intervalo $c \in [n-1, (n-1)(n-2)]$ existe un semigrupo de Abhyankar-Moh de grado n y conductor c. Veremos que la respuesta es positiva si n es par.

3 Construyendo semigrupos de Abhyankar-Moh

Sea S un semigrupo numérico, usamos la notación $S = \langle a_1, \ldots, a_t \rangle$ para indicar que $\{a_1, \ldots, a_t\}$ es su sistema minimal de generadores. Al valor t se le conoce como *dimensión de inmersión* de S.

El primer resultado esencial para construir semigrupos de Abhyankar-Moh es el siguiente, que nos dice que todo semigrupo de Abhyankar-Moh es una *pegada*. La pegada de $S = \langle a_1, \ldots, a_t \rangle$ y $\mathbb{N}$ con respecto a los enteros positivos d y f con $\gcd(d, f) = 1$, es el semigrupo numérico generado por $\{da_1, \ldots, da_t, f\}$, al cual denotamos por $S \oplus_{d,f} \mathbb{N}$.

Proposición 1. *S es un semigrupo de Abhyankar-Moh con dimensión de inmersión $t \geq 3$ si y solo si $S = S' \oplus_{d.f} \mathbb{N}$ donde S' es un semigrupo de Abhyankar-Moh.*

La demostración de esta proposición relaciona los sistemas minimales de generadores de ambos semigrupos y da cotas para los posibles valores de d y f. Además, se tiene que si S es un semigrupo de Abhyankar-Moh, $c(S \oplus_{d,f} \mathbb{N}) = dc(S) + (d-1)(f-1)$. De esta forma, obtenemos el siguiente algoritmo que halla todos los semigrupos de Abhyankar-Moh con valor del conductor acotado.

Algoritmo 1:

Input: $c \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Output: El conjunto $\{A \mid \langle A \rangle$ is an A-M semigroup with $\mathrm{c}(\langle A \rangle) \leq c\}$.
$\mathcal{A} \leftarrow \big\{\{a, b\} \mid 1 < a < b,\ \gcd(a, b) = 1,\ ab - a - b + 1 \leq c\big\}$;
forall $k \in \{2, \ldots, c-1\}$ **do**
  $B \leftarrow \{A \in \mathcal{A} \mid \mathrm{c}(\langle A \rangle) = k\}$;
  forall $A \in B$ **do**
    $G_A \leftarrow \big\{(d, f) \in \mathbb{N}^2 \mid \gcd(f, d) = 1,\ s(A)^2 > f/d >$
      $\gcd\big(A \setminus \{M(A)\}\big) \cdot M(A),\ c \geq \max\{dk + (d-1)(f-1), d^2(k-1) + 1\}\big\}$;
  end forall
  $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \big\{dA \cup \{f\} \mid (d, f) \in G_A\big\}$;
end forall
return $\mathcal{A}$;

Los semigrupos de Abhyankar-Moh se pueden caracterizar completamente a partir de su secuencia de divisores $n = d_0 > d_1 > \ldots > d_h = 1$ como sigue.

Proposición 2. *Sea $n \geq 2$ un entero y sea $D = (d_0 = n, d_1, \ldots, d_{h-1}, d_h = 1)$ una sucesión de divisores estrictamente decreciente. Entonces, la sucesión característica de cualquier semigrupo de Abhyankar-Moh de grado n y secuencia de divisores igual a D es de la forma $(n, d_1k_1, \ldots, d_hk_h)$, con $1 \leq k_1 \leq \frac{d_0}{d_1} - 1$, $d_{i-2}k_{i-1} + 1 \leq d_ik_i \leq \frac{d_0^2}{d_{i-1}} - d_i$ para todo $i = 2, \ldots, h$, y $\gcd\left(\frac{d_{i-1}}{d_i}, k_i\right) = 1$ para $i = 1, \ldots, h$.*

Con esto obtenemos el siguiente algoritmo que nos calcula todos los semigrupos de Abhyankar-Moh de grado n fijado.

Algoritmo 2:

Input: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Output: El conjunto de secuencias características de semigrupos de A-M de grado n.

$\mathcal{F}_n \leftarrow \emptyset$;
$\mathcal{D} \leftarrow \big\{D = (d_0, \ldots, d_h) \mid h \in \mathbb{N},\ D$ es una secuencia de divisores de $n\big\}$;
while $\mathcal{D} \neq \emptyset$ **do**
  $D = (d_0, \ldots, d_h) \leftarrow \mathrm{First}(\mathcal{D})$;
  $\mathcal{K} \leftarrow \Big\{(k_1, \ldots, k_h) \in \mathbb{N}^h \mid \gcd(k_1, n) = \cdots = \gcd(k_h, n) = 1,\ 1 \leq k_1 \leq \frac{d_0}{d_1} - 1$, and $d_{i-2}k_{i-1} + 1 \leq d_ik_i \leq \frac{d_0^2}{d_{i-1}} - d_i$ for any $i = 2, \ldots, h\Big\}$;
  forall $(k_1, \ldots, k_h) \in \mathcal{K}$ **do**
    $\mathcal{F}_n \leftarrow \mathcal{F}_n \cup \{(n, d_1k_1, \ldots, d_hk_h)\}$;
  end forall
  $\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D} \setminus \{D\}$;
end while
return $\mathcal{F}_n$;

Con estas construcciones veremos cómo demostrar nuestro resultado principal.

Teorema 1. *Sea $n > 2$ un número par. Para cualquier número par c con $n-1 \leq c \leq (n-1)(n-2)$, existe un semigrupo de Abhyankar-Moh de grado n y conductor c.*

Referencias

[1] S. S. Abhyankar and T. T. Moh, Embeddings of the line in the plane, *J. reine angew. Math.*, **276** (1975), 148–166

[2] R. D. Barrolleta, E. R. García Barroso, and A. Płoski, On the Abhyankar-Moh inequality, *Univ. Iagel. Acta Math.*, **52** (2015), 7–14.