Problema de localización y rutas con recompensas en árboles*

Elena Fernández
Universidad de Cádiz

Manuel Munoz-Marquez
Universidad de Cádiz

22 de junio de 2023

Resumen

En los problemas de localización y rutas con recompensas, Prize-collecting Location Routing problems (PLRPs), hay un conjunto dado de usuarios demandantes de un servicio ubicados en los nodos de un grafo. Servir un nodo proporciona una recompensa y requiere de una ruta, que tiene un costo asociado, que parta y termine en un nodo seleccionado para la ubicación de un servicio. Cada servidor activado incurre en un costo de instalación. El problema busca encontrar la elección óptima del conjunto de los nodos donde activar un servicio, los demandantes que serán servidos y las rutas a los mismos de forma que se maximice el beneficio neto total.

Se aborda el problema en árboles, obteniéndose una formulación con propiedades de integridad que permite aumentar considerablemente el tamaño de los problemas resolubles.

1. Introduction

Los PLRP amplían los problemas clásicos de localización y rutas, en los que se impone que se atienda toda la demanda y se centran en una decisión conjunta de localización y rutas, permitiendo que el decisor seleccione el subconjunto de usuarios a servir. Los LRP son relevantes desde una perspectiva teórica, ya que integran problemas de localización y rutas, que son dos problemas centrales en la optimización combinatoria. Los LRP también son significativos desde una perspectiva práctica, dadas sus múltiples aplicaciones, por ejemplo, en campos relacionados con la logística y las telecomunicaciones. Como consecuencia, muchos problemas de esta familia han sido estudiados por diferentes autores, y se han propuesto diversas técnicas y métodos de solución para resolverlos [1, 5].

Casi toda la literatura existente sobre LRP aborda problemas en grafos genéricos, generalmente bajo el supuesto de que el grafo es completo. En este caso, tanto el problema de localización como el de rutas son problemas de optimización *NP*-duros. En los problemas de localización la topología del grafo se ha explotado en el diseño de algoritmos adhoc polinómicos para varios problemas de localización, que, en el caso general, son *NP*-difíciles. En especial en problemas de localización/asignación definidos en árboles [8–10] así como para algunos problemas de localización/cubrimiento [4, 7]. Recientemente, [2] estudió varios LRP bajo el supuesto de que el grafo es un árbol. Específicamente, presentaron una formulación de programación matemática con propiedad de integridad y algoritmos de solución en tiempo polinomial derivados para varios casos particulares.

*Los autores han sido financiados parcialmente por la Agencia Estatal de Investigación Españo la y Desarrollo Regional Europeo (FEDER) a través del proyecto MINECOPIDMTM2019-105824GB-I00, así como por el Plan Propio-UCA 2022-2023.

En este trabajo ampliamos el trabajo de [2] al considerar los PLRP que incorporan decisiones de *recolección de recompensas* para la selección de los usuarios a servir. Se han estudiado diferentes modelos de recogida de recompensas en relación con los problemas de rutas de vehículos. Sin embargo,la literatura sobre los problemas con recompensa en el área de los LRP combinados es todavía muy escasa.

A menudo los problemas de localización y rutas surgen en contextos donde es imposible atender toda la demanda y se debe integrar una decisión dentro del problema de optimización original para decidir también el conjunto usuarios que se atenderá, lo que da como resultado versiones de los problemas con recompensas. Los problemas de recompensas generalmente se enfocan en la maximización de la ganancia neta general de los ingresos obtenidos de los usuarios atendidos menos los costos del servicio.

Hasta donde los autores conocen, muy pocos trabajos han estudiado las versiones de LRPs con recompensas.

2. Formulación con propiedad de integridad

Sea $T = (V, E)$ un árbol no dirigido con el conjunto de vértices V, $|V| = n$ y el conjunto de aristas E, $|E| = n - 1$. Sea $f_u \geq 0$ el costo de activación de una instalación en el vértice $u \in V$, $b_u \geq 0$ la recompensa por atender la demanda en el vértice $u \in V$, y $c_e \geq 0$ el costo de atravesar dos veces la arista $e \in E$.

Una solución factible del problema consiste en un conjunto de instalaciones *abiertas*, $O \subseteq V$ y un conjunto de vértices *servidos*, $S \subseteq V$, junto con un conjunto de rutas disjuntas, cada una de ellas que se inicia en alguna instalación abierta, de modo que cada vértice servido es visitado por una de las rutas. Dado que T es un árbol, cada ruta replica todos los ejes que atraviesa. El valor de una solución es la suma de las ganancias de los vértices servidos menos su costo, definido como la suma de los costos de instalación de las instalaciones abiertas, más la suma de los costos de los ejes de las rutas.

Consideramos tres conjuntos de variables de decisión, uno para representar los vértices donde se ubican las instalaciones, otro para representar los vértices que son atendidos y un tercero para representar los arcos de las rutas. Para $u \in V$ sea y_u una variable binaria, que toma el valor uno sí y sólo sí una instalación está ubicada en el vértice u. Además, para $u \in V$ sea z_u una variable binaria que toma el valor uno sí y sólo sí se sirve el vértice u. Finalmente, cada arco $(u, v) \in A$ está asociado con una variable de decisión binaria x_{uv}, que toma el valor 1 sí y solo sí el arco (u, v) pertenece a una ruta.

La formulación es la siguiente:

$$LR: \quad \max \sum_{u \in V} b_u z_u - \sum_{u \in V} f_u y_u - \sum_{(u,v) \in A} c_{uv} x_{uv} \tag{1}$$

$$s.t. y_v + \sum_{(u,v) \in \delta^-(v)} x_{uv} = z_v \qquad v \in V \tag{2}$$

$$x_{uv} + x_{vu} \leq z_u \qquad (u, v) \in E \tag{3}$$

$$x_{uv} + x_{vu} \leq z_v \qquad (u, v) \in E \tag{4}$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \qquad (u, v) \in A \tag{5}$$

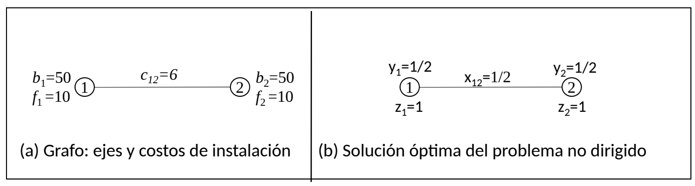
$$y_i \in \{0, 1\} \qquad i \in L \tag{6}$$

$$z_v \in \{0, 1\} \qquad v \in V \tag{7}$$

Restricciones	Índices v	(u,v)	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{25}	x_{31}	x_{36}	x_{41}	x_{52}	x_{63}	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
(2)	1					1		1		1			-1						1					
	2		1								1			-1						1				
	3			1								1			-1						1			
	4				1											-1						1		
	5						1										-1						1	
	6								1									-1						1
(3) + (4)	1	(1, 2)	1			1							-1											
	2	(1, 2)	1			1								-1										
	1	(1, 3)		1				1					-1											
	3	(1, 3)		1				1							-1									
	1	(1, 4)			1					1			-1											
	4	(1, 4)			1					1						-1								
	2	(2, 5)					1				1			-1										
	5	(2, 5)					1				1						-1							
	3	(3, 6)							1			1			-1									
	6	(3, 6)							1			1						-1						

Cuadro 1: Matriz de coeficientes para la gráfica de la figura 2

Las restricciones (2) garantizan que cada componente que se sirven contiene una instalación abierta. Las restricciones (3) y (4) aseguran que ningún eje sea atravesado en ambas direcciones y también que ambos nodos finales de cualquier eje atravesado sean atendidos. La función objetivo calcula las ganancias de los vértices atendidos menos la suma de los costos de activación de las instalaciones abiertas más los costos de enrutamiento de los arcos utilizados.



(a) Grafo: ejes y costos de instalación

(b) Solución óptima del problema no dirigido

Figura 1: Formulación no dirigida sin integridad

Obaservación 2.1. *La versión no dirigida de la formulación* (2)-(7)*en la que la variable* x_{uv}, *toma el valor 1 si y solo si la arista* $(u, v) \in E$ *se utiliza no tiene la propiedad de integridad. Un contraejemplo simple donde la relajación de la formulación no dirigida da una solución no entera se muestra en la figura 1 para un caso con dos nodos y* $b_1 = b_2 = 50$, $f_1 = f_2 = 10$ *y* $c_{12} = 6$.

La tabla 1 ilustra la estructura de la matriz de coeficientes para el pequeño ejemplo de la figura 2.

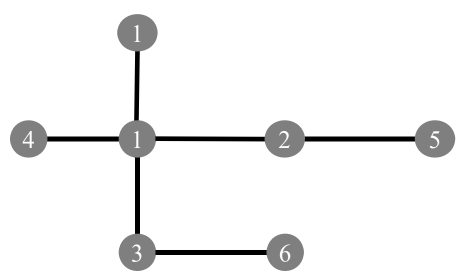


Figura 2: Gráfo de la tabla 1

3. Resultados y líneas futuras

La PLRP como un problema con propiedades de integridad permite aumentar significativamente el tamaño de los problemas resolubles, la tabla 2 recoge la media y desviación típica de los tiempos empleados para la resolución según el número de nodos del problema para unas instancias generadas aleatoriamente.

Se encuentra en fase de realización la aplicación de este modelo para la resolución del problema de localización-rutas con recompensas y capacidad mediante el uso de relajación lagrangiana.

Nodos	Tiempos (s) Media	Desviación típica
20	0.0212	0.0041
40	0.0247	0.0041
60	0.0284	0.0044
80	0.0370	0.0055
100	0.0473	0.0069
200	0.1504	0.0217
400	0.8147	0.1221

Nodos	Tiempos (s) Media	Desviación típica
600	2.4420	0.3833
800	5.8741	1.0310
1000	12.0899	1.9928
2000	8.6382	26.8316
4000	140.3098	299.5180
6000	152.4084	629.9862
8000	339.0018	1402.5717

Cuadro 2: Tiempos medios y desviaciones típicas según nodos

Referencias

[1] M. Albareda-Sambola and J. Rodríguez-Pereira. Location-routing and location–arc routing. In*Location Science*. G. Laporte, S. Nickel and F. Saldanha da Gama (eds),Springer, 2019.

[2] J. Aráoz, E. Fernández, and S. Rueda. Location routing problems on trees. *Discrete Applied Mathematics*, 259:1–18, 2019.

[3] J. Aráoz, E. Fernández, and C. Franquesa. The clustered price-collecting arc routing problem. *Transportation Science*, 43:287–300, 2009.

[4] M. Conforti, G. Cornuéjols, and K. Vušković. Balanced matrices. *Discrete Mathematics*, 306:2411–2437, 2006.

[5] G. Nagy and S. Salhi. Location-routing: Issues, models and methods. *European Journal on Operational Research*, 177:649–672, 2007.

[6] G. L. Nemhauser and L.A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. John Wiley and Sons, 1988.

[7] A. Tamir. A class of balanced matrices arising from location problems. *SIAMJ. Algebraic Discrete Methods*, 4:363–370, 1983.

[8] A. Tamir and T. Lowe. The generalized p-forest problem on a tree network. *Networks*, 22:217–230, 1992.

[9] B. C. Tansel, R. L. Francis, and T. J. Lowe. Location on networks: A survey. part i: The p-center and p-median problems. *Management Science*, 29:482–497, 1983.

[10] B. C. Tansel, R. L. Francis, and T. J. Lowe. Location on networks: A survey. part ii: Exploiting tree network structure. *Management Science*, 29:498–511, 1983.