

Mejorando las técnicas de Tomografía de Impedancia Eléctrica*

Á. Carmona, A.M. Encinas, M.J. Jiménez
Universitat Politècnica de Catalunya

Á. Samperio
Universidad de Valladolid

30 de mayo de 2023

Resumen

En aplicaciones médicas, la Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE) representa una técnica de imagen no invasiva y libre de radiación para recuperar la distribución de conductividades dentro del cuerpo bajo observación, a partir de mediciones en la superficie de la piel. Además, la TIE representa un área de investigación pionera debido a su instrumentación portátil y de bajo coste. Sin embargo, los experimentos numéricos realizados reiteradamente hasta la fecha muestran las dificultades de diseñar algoritmos de recuperación en redes densas, lo que limita en gran medida el rango de aplicabilidad del método. Por lo tanto, son necesarios nuevos algoritmos para superar esta dificultad estructural.

1. Introducción

Las técnicas de TIE buscan recuperar la conductividad del interior de un dominio a partir del conocimiento de las medidas eléctricas en su frontera. La TIE tiene importantes aplicaciones en una amplia variedad de ámbitos, entre los que destacamos la prospección geofísica y, especialmente, el diagnóstico clínico a través de imágenes médicas, [7]. El problema de la TIE también se conoce como problema de conductividad inversa y su formulación matemática en el caso continuo se debe a A.P. Calderón. Es bien sabido que este problema está severamente mal planteado y, por lo tanto, se han realizado muchos esfuerzos en el estudio de la unicidad, la estabilidad y la reconstrucción de la conductividad a partir de mediciones de contorno, ver [1, 4, 5]. Debido a que el problema es altamente sensible a pequeñas alteraciones en los datos del contorno, [1, 2, 5, 6], los algoritmos de recuperación efectivos se reducen a considerar discretizaciones con una cantidad muy limitada de medidas en la frontera. En consecuencia, el rango de aplicabilidad del método se ve gravemente afectado por la dificultad de diseñar algoritmos de recuperación en redes densas. Actualmente se implementa y comercializa la TIE para la monitorización de la ventilación mecánica, y además es ampliamente reconocida la relevancia de la TIE para la detección del cáncer, que se basa en el hecho de que la conductividad del tumor canceroso es mayor que la conductividad de los tejidos sanos. Sin embargo, su uso en ámbitos como la detección temprana de tumores cancerosos de mama está lejos de la implementación práctica, aunque tiene un potencial prometedor. La razón principal de esta controversia radica en el hecho de que los dispositivos médicos de TIE se basan en redes toscas con muy pocos electrodos, generalmente dieciséis electrodos. Aunque muchos autores atribuyen las

*Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación por medio del proyecto PID2021-122501NB-I00 y por la Universitat Politècnica de Catalunya con la ayuda AGRUPS-2022.

inestabilidades a la presencia de ruido o incluso a perturbaciones desconocidas, nuestro grupo ha realizado innovadores tests numéricos en el campo discreto que confirman que la inestabilidad es inherente cuando se consideran redes con más de 15 nodos en la frontera. Para varias conductividades dadas, hemos resuelto el problema de contorno directo y luego hemos aplicado el algoritmo teórico de recuperación exacta. Para las redes consideradas, el número anterior de datos de contorno parece estar en el umbral de la estabilidad y la precisión. Por lo tanto, son necesarios nuevos algoritmos estables que además superen esta dificultad estructural de la cantidad de datos a considerar en el contorno.

2. Los nuevos algoritmos

En general, el mejor resultado para la estimación de las conductancias es del tipo logaritmo, lo que implica que pequeños errores en las medidas pueden impedir obtener una buena aproximación de las verdaderas conductancias, especialmente a medida que nos alejamos de la frontera. Por lo tanto, el problema inverso sólo se puede resolver con precisión imponiendo algunas restricciones de regularización en la conductividad. En este sentido, G. Alessandrini y S. Vessella en el caso continuo demostraron que si se sabe a priori que la conductividad es constante por tramos con un número acotado de valores desconocidos, entonces el error en la conductividad será proporcional al error en los datos del contorno. Este asunto es de fundamental importancia para la confiabilidad de los algoritmos de reconstrucción que nuestro grupo está comenzando a diseñar en el campo discreto. Nuestro modelo se basa en las llamadas redes resistivas que representan una interacción adecuada entre la configuración continua y discreta para problemas de TIE, [3–6]. Por supuesto, nuestro análisis se basa en los trabajos pioneros de la escuela matemática de E.B. Curtis y J. A. Morrow, pero ahora se coloca en un fondo más sólido. Hemos obtenido algoritmos de recuperación exacta para mallas bidimensionales y tridimensionales y sobre redes araña [3, 4]. Sin embargo, desde un punto de vista numérico, el panorama dista mucho de ser satisfactorio. Existe una gran brecha entre los algoritmos teóricos y numéricos, principalmente debido a problemas de inestabilidad como se mencionó anteriormente. Aunque se han resuelto algunos casos, siempre utilizando redes araña con pocos vértices en el contorno, [7], la implementación de algoritmos de recuperación para problemas reales es hoy en día uno de los retos más relevantes.

En vista de las explicaciones anteriores, nos decidimos a traducir la hipótesis de conductividad constante a tramos (PwC) a la configuración discreta, estableciendo así un límite superior para el número de valores permitidos en las redes consideradas para obtener la precisión requerida. Estamos comprobando que el diseño de algoritmos estables para la recuperación de conductancias puede lograrse mediante un proceso de optimización, incluyendo penalizaciones en la función objetivo que sean consistentes con la hipótesis de PwC. Como consecuencia, podemos mejorar las técnicas de TIE existentes para el diagnóstico clínico.

Referencias

- [1] G. Alessandrini, M.V. de Hoop, R. Gaburro. Uniqueness for the electrostatic inverse boundary value problem with piecewise constant anisotropic conductivities. *Inverse Problems*, **33** (2017), 125013, 24 pp.
- [2] G. Alessandrini, M.V. de Hoop, R. Gaburro, E. Sincich. Lipschitz stability for the electrostatic inverse boundary value problem with piecewise linear conductivities. *IJ. Math. Pures Appl.*, **107** (2017), 638-664.

- [3] C. Araúz, Á Carmona, A.M. Encinas. Dirichlet-to-Robin map on finite networks, *Appl. Anal. Discrete Math.*, **9** (2015), 85-102.
- [4] C. Araúz, Á Carmona, A.M. Encinas, A.M., M. Mitjana. Recovering the conductances on grids: a theoretical justification, *Contemp. Math.*, **658** (2016), 149-166.
- [5] L. Borcea, V. Druskin, F. Guevara Vasquez, A.V. Mamonov. Resistor network approaches to electrical impedance tomography. *Inverse problems and applications: inside out. II*, **60** (2013), 55-118.
- [6] L. Borcea, J.J. Garzella, F. Guevara Vasquez. On the solvability of the discrete conductivity and Schrödinger inverse problems. *SIAM J. Appl. Math.*, **76** (2016), 1053-1075.
- [7] D.S. Holder: *Electrical Impedance Tomography, methods, history and applications*. IoP Publishing Ltd., Bristol and Philadelphia, 2005.