Subgráficas pequeñas con suficientes colores de una coloración dada

Mucuy-kak Guevara
Facultad de Ciencias, UNAM

Diego González-Moreno
Universidad Autónoma de México

Juan José Montellano
Instituto de Matemáticas, UNAM

May 29, 2023

Abstract

En este trabajo veremos algunas condiciones que se pueden pedir a una coloración de las aristas de un grafo G, de tal suerte que exista un subgrafo *pequeña* H de G en donde aparecen todos los colores o *suficientes* de ellos. También se verán algunas implicaciones en problemas anti-Ramsey y en digrafos.

1 Introduction

Dado un grafo G y una coloración de aristas de G, un subgrafo H de G se llamará *arcoíris* si ningún par de aristas de H recibe el mismo color. Dados dos grafos G, H, el número anti-Ramsey, $ar(G, H)$, se define como el menor entero t tal que toda coloración de t aristas de G produce al menos una copia arcoíris de H. En general, los problemas anti-Ramsey no presentan condiciones en las coloraciones de aristas [1, 2]. En este artículo, proponemos encontrar estructuras arcoíris al agregar algunas propiedades en las coloraciones de aristas, y lo hacemos mostrando lo siguiente: si utilizamos un *pequeño* número de colores (es decir, menos de $ar(G, H)$) en una coloración de aristas de un grafo G, pero la coloración de aristas tiene algunas propiedades, entonces existe un subgrafo G^* de G con *muchos* colores (es decir, con $ar(G^*, H)$ colores), lo que implica la existencia de una copia arcoíris de H en G^* y, por lo tanto, en G. Presentaremos algunos resultados cuando la coloración de aristas es tal que cada color aparece al menos h veces (coloraciones acotadas por h) en cualquier grafo G y cuando las aristas de cada color inducen un grafo libre de cierto subgrafo M en el grafo completo K_n y se verán varias implicaciones en problemas anti-Ramsey y problemas de digrafos.

2 Results

Theorem 2.1. *Sean k, h enteros tales que $0 \leq k \leq n$ y $h \geq 1$. Sea G un grafo coloreado con k aristas. Si cada clase cromática de G tiene un tamaño de al menos $(n-k+1)(h-1)+(n-k)^2+1$, entonces existe un subgrafo H de G, coloreado con k aristas, de orden k, tal que cada clase cromática de H tiene un tamaño de al menos h.*

Theorem 2.2. *Sea $\Gamma : E(K_n) \to [m]$ una coloración de aristas de K_n, y supongamos que hay enteros $h, r \geq 1$ y un conjunto de colores $Q \subseteq [m]$ tal que para cada color $c \in Q$ existe un conjunto r'-subconjunto $V_c \subseteq V(G_c)$ (con $r' \leq r$) tal que para todo $x \in V_c$, $e(G_c[V_c \setminus x]) \geq h$.*

Si para algún $k \geq 3$ tenemos que

$$\frac{n^2}{2(n-k-1)} - \frac{n}{2} \geq \binom{r}{2}|Q|,$$

entonces existe un subgrafo H de K_n de orden k tal que cada color en Q aparece en h aristas de H.

Sea G un grafo y sea $\mathcal{H}$ una familia de grafos. Sea Γ una coloración de aristas de G. Decimos que Γ es una *coloración de aristas libre de $\mathcal{H}$ en G*, si $G_c \notin \mathcal{H}$ para cada $c \in [m]$.

Corollary 2.3. *Sea $q \geq 1$ un entero positivo y $\mathcal{H} = G : \beta(G) \leq q$. Sea $\Gamma : E(K_n) \to [m]$ una coloración de aristas libre de $\mathcal{H}$ en K_n. Si para algún $k \geq 1$,*

$$\frac{n^2}{2(n-k+1)} - \frac{n}{2} \geq m\binom{2q+2}{2},$$

entonces existe un subgrafo $H \subseteq K_n$ de orden k tal que cada color en $[m]$ aparece en al menos q aristas de H.

Corollary 2.4. *Sea $q \geq 1$ un entero positivo y $\mathcal{H} = G : \omega(G) \leq q$. Sea $\Gamma : E(K_n) \to [m]$ una coloración de aristas libre de $\mathcal{H}$ en K_n. Si para algún $k \geq 1$,*

$$\frac{n^2}{2(n-k+1)} - \frac{n}{2} \geq m\binom{q+1}{2},$$

entonces existe un subgrafo $H \subseteq K_n$ de orden k tal que cada color en $[m]$ aparece en al menos $\binom{q}{2}$ aristas de H.

Lemma 2.5. *Sea k, n enteros tales que $2 \leq k < n$. Sea G un grafo coloreado con k aristas de orden n tal que cada clase cromática tiene un tamaño de al menos $e_G(n-k+1)+1$. Entonces,*
i) $k < \frac{n(n-1)}{(n-k)(n-k+1)}$
ii) $n \leq k + \lfloor\sqrt{k}\rfloor + 1$,
iii) Para toda $r \geq 2$, $\frac{\binom{n}{n-k}}{\binom{n-r}{n-k-r}} > k^{\frac{r}{2}}\left(1+\frac{2}{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right)^{\frac{r}{2}}\left(1+\frac{k}{(\lfloor\sqrt{k}\rfloor-1)(k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor)}\right)^{r-2}$
iv) Para toda $n-k \geq s \geq 3$, $\left(\frac{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}{\lfloor\sqrt{k}\rfloor+2}\right)^{\frac{s-2}{2}}\frac{1}{k^{\frac{s-2}{2}}} > \frac{\binom{n-1-s}{n-k-s}}{\binom{n-2}{n-k-2}}$

Lemma 2.6. *Sea G un grafo de orden n, y sea $3 \leq k < n$ un entero tal que $k < \frac{n(n-1)}{(n-k)(n-k+1)}$. Supongamos que existe un subgrafo H de G de tamaño al menos $\max e_G(n-k+1), n-k+1$; $\Delta(H) \leq n-k$ y tal que el conjunto T_H de $(n-k)$-subconjuntos $S \subseteq V(G)$ que contienen un conjunto dominante de H tiene una cardinalidad de al menos $\frac{\binom{n}{n-k}}{k}$. Entonces, $n-k \geq 3$ y $e(H) \leq n-k+1$.*

Para cada clase cromática H, sea T_H el conjunto de subconjuntos de tamaño $(n-k)$, es decir, $(n-k)$-subconjuntos $S \subseteq V(H)$ que contienen un conjunto dominante de H.

Lemma 2.7. *Sean k, n enteros tales que $2 \leq k < n$. Sea G un grafo coloreado con k aristas de orden n tal que cada clase cromática tiene un tamaño de al menos $\max\{e_G(n-k+1), n-k\}+1$. Si existe una clase cromática H tal que $\Delta(H) \leq n-k$ y $|T_H| \geq \frac{\binom{n}{n-k}}{k}$, entonces $n-k \geq 3$ y $e(H) = n-k+1$.*

Theorem 2.8. *Sean k, n enteros tales que $3 \leq k < n$. Sea G un grafo conexo coloreado con k aristas de orden n. Existe un subgrafo H de G coloreado con k aristas y de orden k, siempre que se cumpla alguna de las siguientes condiciones:*
i) Cada clase cromática tiene un tamaño de al menos $e_G(n-k+1)+1$ y $n-k \leq 2$.
ii) Cada clase cromática tiene un tamaño de al menos $e_G(n-k+1)+1$ y G tiene un ciclo de longitud al menos $n-k+1$.
iii) Cada clase cromática tiene un tamaño de al menos $e_G(n-k+1)+2$.

3 Conclusions

Como consecuencias del Teorema 2.8, se obtienen los siguientes resultados.

Corollary 3.1. *Sea G un grafo de orden n y sea $\Gamma : E(G) \to n-k$ una coloración de aristas de G. Si cada clase cromática de Γ tiene un tamaño de al menos k^2+1, entonces G contiene un ciclo arcoíris de longitud como máximo $n-k$.*

Theorem 3.2. *Sean $h \geq 1$, $k \geq 0$ enteros y sea G un grafo de orden n. Si $\Gamma : E(G) \to [n-k]$ es una coloración de aristas tal que cada clase cromática tiene un tamaño de al menos $(k+1)(h-1)+k^2+1$, entonces el grafo coloreado G tiene h ciclos arcoíris de aristas disjuntas de longitud como máximo $n-k$.*

Theorem 3.3. *Sea G un grafo y supongamos que para algún entero n_0 y algunas constantes $\alpha, c_0 \geq 0$, para todo $n \geq n_0$ se cumple que*
$$c_0 n^{1+\alpha} \geq ar(G,n).$$
i) Sea $\mathcal{H} = K_{1,s} : s \geq 1$ la familia de estrellas. Entonces, para todo n tal que $n - \lfloor \frac{n^{1-\alpha}}{12c_0} \rfloor - 1 \geq n_0$,
$$ar^*_n(G,\mathcal{H}) \leq ar(G,k),$$
donde $k = n - \lfloor \frac{n^{1-\alpha}}{12c_0} \rfloor - 1$.
ii) Sea $\mathcal{H} = G : K_3 \not\subseteq G$ la familia de grafos sin triángulos. Entonces, para todo n tal que $n - \lfloor \frac{n^{1-\alpha}}{6c_0} \rfloor - 1 \geq n_0$,
$$ar^*_n(G,\mathcal{H}) \leq ar(G,k),$$
donde $k = n - \lfloor \frac{n^{1-\alpha}}{6c_0} \rfloor - 1$.

Una implicación importante, pero en digrafos, del teorema 2.8 es el siguiente resultado:

Theorem 3.4. *Sea D un digrafo de orden n. Si hay k vértices en D con grado al menos $(n-k)^2+1$, entonces D contiene un ciclo dirigido de longitud como máximo k.*

References

[1] P. Erdös, M. Simonovits, and V. T. Sós. Anti-Ramsey theorems. In Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdös on his 60th birthday), Vol. II, pages 633–643. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. North-Holland, Amsterdam, 1975.

[2] J. J. Montellano-Ballesteros and V. Neumann-Lara, An anti-Ramsey theorem on cycles, Graphs Combin. 21 (2005), no. 3, 343–354.